

SYSTÈMES DYNAMIQUES II

PATRICE LE CALVEZ

COURS FONDAMENTAL II, MASTER 2

2018-2019

1.1 Mesures invariantes des systèmes dynamiques topologiques.

Une application continue $T : X \rightarrow X$ sur un espace topologique X n'admet pas nécessairement de mesure borélienne invariante (par exemple la translation $n \mapsto n + 1$ sur \mathbf{N}). Nous verrons cependant que dans le cas où X est un espace métrisable compact, toute application continue $T : X \rightarrow X$ admet au moins une mesure borélienne de probabilité invariante. Rappelons que le théorème de représentation de Riesz nous donne une bijection entre l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité et l'ensemble des formes positives L sur $C(X, \mathbf{C})$ telles que $L(\mathbf{1}) = 1$. Ici $C(X, \mathbf{C})$ représente l'espace vectoriel des fonctions continues $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ et $C(X, \mathbf{C})^*$ l'espace des formes linéaires continues $L : C(X, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$. Une forme est alors positive si elle envoie toute fonction à valeurs réelles positives sur un réel positif (elle est alors nécessairement continue). Il existe une *topologie forte* sur $C(X, \mathbf{C})^*$ définie par la norme

$$\|L\| = \sup_{f \in C(X, \mathbf{C}), \|f\| \leq 1} |L(f)|.$$

Il existe également une *topologie faible** définie ainsi : une suite $(L_n)_{n \geq 0}$ converge vers L si $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(f) = L(f)$ pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$. Un résultat fondamental sur cette topologie est que la boule unité $\{L \in C(X, \mathbf{C})^* \mid \|L\| \leq 1\}$ est compacte (voir exercice 1). Remarquons également que l'espace $M(X)$ des mesures boréliennes de probabilité est une partie convexe de $C(X, \mathbf{C})^*$, fermée pour la topologie faible* (via la représentation de Riesz), et qu'elle est contenue dans la boule unité puisque $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu \leq \|f\|$ pour toute fonction $f \in C(X, \mathbf{C})$. Ainsi, l'ensemble $M(X)$, muni de la topologie faible*, est compact.

Commençons par le théorème de Krylov-Bogolyubov, qui est un cas particulier du théorème de Markov-Kakutani.

THÉORÈME 1.1.1 : *Si X est un espace topologique compact métrisable, toute application continue $T : X \rightarrow X$ laisse invariant au moins une mesure borélienne de probabilité. De plus, l'espace $M_T(X)$ des mesures invariantes est une partie convexe fermée de $M(X)$.*

Preuve. On veut prouver que l'application

$$\begin{aligned} T_* : M(X) &\rightarrow M(X) \\ \mu &\mapsto T_*(\mu) \end{aligned}$$

a un point fixe. Cette application est continue pour la topologie faible*. En effet, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \mu$, alors pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f dT_*(\mu_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f \circ T d\mu_n = \int f \circ T d\mu = \int f dT_*(\mu).$$

Elle est également affine (elle envoie barycentre sur barycentre). Fixons $\mu \in M(X)$ et posons

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T_*^i(\mu).$$

L'espace $M(T)$ étant compact pour la topologie faible*, on peut extraire une suite $(\mu_{n_m})_{m \geq 0}$ qui converge pour cette topologie vers une mesure μ' . Remarquons que

$$T_*(\mu_{n_m}) - \mu_{n_m} = \frac{1}{n_m}(T_*^{n_m}(\mu) - \mu)$$

et donc que

$$\|T_*(\mu_{n_m}) - \mu_{n_m}\| \leq \frac{2}{n_m}.$$

Cette suite converge donc fortement (et donc également faiblement) vers 0 dans $C(X, \mathbf{C})^*$. Mais elle converge faiblement vers $T_*(\mu') - \mu'$. On en déduit que $T_*(\mu') = \mu'$.

L'ensemble des mesures invariantes est fermé car T_* est continue, il est convexe car T_* est affine. \square

Le théorème ne nous dit rien, bien sûr, sur ces mesures invariantes (elles peuvent par exemple être associées à des orbites périodiques). Nous allons voir maintenant comment trouver des mesures invariantes ergodiques. Rappelons qu'un point x d'une partie convexe C d'un espace affine est *extrémal* si, pour tous points x', x'' de C et tout $t \in]0, 1[$, l'égalité $x = tx' + (1-t)x''$ implique que $x' = x'' = x$.

THÉORÈME 1.1.2 : *Les points extrémaux de $M_T(X)$ sont les mesures invariantes ergodiques.*

Preuve. Supposons d'abord que $\mu \in M_T(X)$ n'est pas ergodique. Il existe une partie invariante A telle que $0 < \mu(A) < 1$. On peut décomposer

$$\mu = \mu(A) \frac{\mu_A}{\mu(A)} + \mu(X \setminus A) \frac{\mu_{X \setminus A}}{\mu(X \setminus A)}$$

comme barycentre de deux mesures de probabilité invariantes.

Supposons maintenant que $\mu \in M_T(X)$ est ergodique et s'écrit $\mu = t\mu' + (1-t)\mu''$, où μ', μ'' sont dans $M_T(X)$ et t dans $]0, 1[$. Remarquons que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu'(A) = 0,$$

ce qui signifie que μ' est dominée par μ . Grâce au théorème de Radon-Nikodym, on peut écrire $d\mu' = \varphi d\mu$, où $\varphi \in L^1(\mu)$. Le fait que les mesures μ et μ' sont invariantes par T implique alors que la fonction φ est également invariante. On en déduit que φ est constante μ -presque partout. Ceci implique que $\varphi = \mathbf{1}$ puisque μ et μ' sont des mesures de probabilité, et donc que $\mu' = \mu$. En répétant l'argument, on obtient $\mu'' = \mu$.

Au lieu du théorème de Radon-Nikodym, on peut également invoquer le théorème ergodique de Birkhoff. En effet, pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$, on sait que pour μ -presque tout point x , la

suite $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ converge vers $\int f d\mu$. Ceci est donc vrai également μ' -presque partout, Si

on applique le théorème de Birkhoff à μ' , on sait que pour μ' -presque tout point x , la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ converge vers une fonction $f^* \in L^1(\mu')$ et que $\int f^* d\mu' = \int f d\mu'$. Puisque f^* est

la fonction constante $\int f d\mu$, on obtient $\int f d\mu = \int f d\mu'$ pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$. \square

COROLLAIRE 1.1.3 : *Il existe au moins une mesure borélienne de probabilité invariante qui est ergodique.*

Preuve. On sait que $M_T(X)$ est l'adhérence des barycentres des point extrémaux et donc qu'il existe des points extrémaux (voir exercice 2). \square

Remarque Le théorème de représentation de Choquet nous donne un résultat plus précis. Pour toute mesure $\mu \in M_T(X)$, il existe une mesure borélienne de probabilité ν_μ sur l'espace métrisable $M_T(X)$ tel que l'ensemble $E_T(X)$ des mesures extrémales vérifie $\nu_\mu(E_T(X)) = 1$ et tel que pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$ on a

$$\int f d\mu = \int_{M_T(X)} \left(\int f d\mu' \right) d\nu_\mu(\mu').$$

1.2 Unique ergodicité .

Nous allons introduire une nouvelle propriété portant sur les systèmes dynamiques topologiques.

PROPOSITION 1.2.1 : *Soit X un espace topologique compact métrisable et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *l'ensemble $M_T(X)$ est réduit à un point ;*

ii) *pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$ et tout $x \in X$, la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x)$ converge et sa limite ne dépend pas de x ;*

iii) *pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$, la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$ converge uniformément vers une fonction constante.*

Si ces propriétés sont vérifiées, on dira que le système est uniquement ergodique .

Preuve. Expliquons d'abord pourquoi **i**) implique **iii**). Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, une suite d'entiers $(n_m)_{m \geq 0}$ et une suite $(x_m)_{m \geq 0}$ de points de X tels que $\lim_{m \rightarrow +\infty} n_m = +\infty$ et

$$\left| \frac{1}{n_m} \sum_{i=0}^{n_m-1} f \circ T^i(x_m) - \int f d\mu \right| \geq \varepsilon.$$

Notons δ_{x_m} la mesure de Dirac en x_m et posons $\mu_m = \frac{1}{n_m} \sum_{i=0}^{n_m-1} T_*^i \delta_{x_m}$. L'ensemble $M(T)$ étant compact pour la topologie faible*, on peut supposer que la suite $(\mu_m)_{m \geq 0}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité μ' . Ici encore, on a

$$T_*(\mu_m) - \mu_m = \frac{1}{n_m} (T_*^{n_m}(\delta_{x_m}) - \delta_{x_m})$$

et

$$\|T_*(\mu_m) - \mu_m\| \leq \frac{2}{n_m},$$

ce qui implique que μ' est invariante. Remarquons maintenant que $\mu' \neq \mu$ car

$$\int f d\mu' = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int f d\mu_m \neq \int f d\mu.$$

Ceci contredit **i**).

Il reste à prouver que **ii**) implique **i**), puisque **iii**) implique trivialement **ii**). Fixons $x \in X$. Pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$, posons

$$L(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x).$$

On obtient une forme positive L sur $C(X, \mathbf{C})$ qui envoie $\mathbf{1}$ sur 1. Elle est donc continue et définit une mesure de probabilité μ . C'est l'unique mesure de probabilité invariante. En effet, le théorème ergodique de Birkhoff nous dit que si $\mu' \in M_T(X)$, alors, pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$, on a

$$\int f d\mu' = \int f^* d\mu' = \int f d\mu.$$

□

Remarques.

1. Si T est uniquement ergodique, la mesure invariante est nécessairement ergodique.
2. La propriété d'unique ergodicité est stable par conjugaison. Plus généralement si X et Y sont des espaces topologiques compacts métrisables, si $T : X \rightarrow X$ est uniquement ergodique et si $S : Y \rightarrow Y$ est un facteur de T , alors S est uniquement ergodique.

Exemples

1. Un endomorphisme linéaire surjectif de \mathbf{T}^r n'est pas uniquement ergodique car il fixe 0 et préserve la mesure de Haar.
2. Les décalages de Bernouilli ne sont pas uniquement ergodiques car ils ont une infinité d'orbites périodiques.
3. Une rotation de \mathbf{T} d'angle rationnel n'est pas uniquement ergodique car elle a une infinité d'orbites périodiques.
4. Une rotation $T_{\hat{a}} : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$, où $\hat{a} = a + \mathbf{Z}^r$ et $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbf{R}^r$, telle que 1, a_1, \dots, a_r ne sont pas rationnellement indépendants n'est pas uniquement ergodique car elle préserve une mesure qui n'est pas ergodique, à savoir la mesure de Haar.
5. Une rotation de \mathbf{T} d'angle irrationnel est uniquement ergodique, plus généralement une rotation $T_{\hat{a}} : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$, où $\hat{a} = a + \mathbf{Z}^r$ et $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbf{R}^r$, telle que 1, a_1, \dots, a_r sont rationnellement indépendants. En effet, si $\mu \in M(\mathbf{T}^r)$ est invariante par $T_{\hat{a}}$, alors μ est invariante par tout $T_{n\hat{a}}$, $n \geq 0$. Puisque la suite $(n\hat{a})_{n \geq 0}$ est dense dans \mathbf{T}^r , on en déduit que μ est invariante par tout T_b , $b \in \mathbf{T}^r$. Or la mesure de Haar est la seule mesure vérifiant cette propriété.

Nous allons conclure en donnant un exemple intéressant de système dynamique uniquement ergodique. Nous en déduirons des propriétés d'équirépartition de certaines suites.

PROPOSITION 1.2.2 : Soit $\hat{a} \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, alors l'homéomorphisme

$$F : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$$

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_r) \mapsto (\hat{x}_1 + \hat{a}, \hat{x}_1 + \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{r-1} + \hat{x}_r)$$

est *uniquement ergodique*.

Preuve. L'homéomorphisme F , composée d'une translation et d'un automorphisme linéaire de \mathbf{T}^r , préserve la mesure de Haar. Nous voulons montrer que c'est la seule mesure invariante. Pour tout $k \in \mathbf{Z}^r$, on définit une fonction $e_k : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{C}$ en posant

$$e_k(x + \mathbf{Z}^r) = e^{2i\pi\langle k, x \rangle}.$$

Donnons nous une mesure de probabilité μ invariante et, pour tout $k \in \mathbf{Z}^r$, considérons le k -ième coefficient de Fourier $c_k(\mu) = \int_{\mathbf{T}^r} e_{-k} d\mu$. L'invariance de μ se traduit par l'égalité

$$c_{(k_1, \dots, k_r)}(\mu) = \int_{\mathbf{T}^r} e_{-k} d\mu = \int_{\mathbf{T}^r} e_{-k} \circ F d\mu = e^{-2i\pi k_1 a} c_{(k_1+k_2, \dots, k_{r-1}+k_r, k_r)}(\mu)$$

Il nous faut bien sûr prouver que $c_k(\mu) = 0$ si $k \neq 0$. L'égalité au-dessus nous dit que c'est le cas si $k = (k_1, 0, \dots, 0)$. Montrons par récurrence sur s que c'est le cas si $k = (k_1, \dots, k_s, 0, \dots, 0)$. Supposons donc que ceci est vrai pour $s-1$. Fixons $k = (k_1, \dots, k_s, 0, \dots, 0)$. Remarquons que, pour tout $n \geq 0$, la fonction $e_k \circ F^n$ s'écrit

$$e_k \circ F^n = \lambda_n e_{k(n)},$$

où

$$k(n) = (k_1(n), \dots, k_{s-1}(n), k_s, 0, \dots, 0).$$

Remarquons également que si $n' \neq n$, alors $k(n') \neq k(n)$, ce qui implique, grâce à l'hypothèse de récurrence que

$$\int_{\mathbf{T}^r} (e_k \circ F^n) \overline{(e_k \circ F^{n'})} d\mu = \int_{\mathbf{T}^r} \lambda_n \overline{\lambda_{n'}} e_{k(n)-k(n')} d\mu = \lambda_n \overline{\lambda_{n'}} c_{k(n')-k(n)}(\mu) = 0.$$

Ainsi la famille $(e_k \circ F^n)_{n \geq 0}$ est orthonormée dans $L^2(\mu)$. On en déduit, par l'inégalité de Bessel, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_0, e_k \circ F^n \rangle_{L^2(\mu)}|^2 \leq \|e_0\|_{L^2(\mu)}^2 = 1.$$

Or, on a

$$\langle e_0, e_k \circ F^n \rangle_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbf{T}^r} \overline{e_k \circ F^n} d\mu = \int_{\mathbf{T}^r} \overline{e_k} d\mu = c_k(\mu),$$

ce qui implique que $c_k(\mu) = 0$. □

Nous dirons qu'une suite de réels $(x_n)_{n \geq 0}$ est *équirépartie modulo un*, si pour tout intervalle $[a, b]$ de $[0, 1]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \#\{k < n \mid x_k - [x_k] \in [a, b]\} = b - a.$$

Si on pose $\hat{x}_n = x_n + \mathbf{Z}$ et $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k < n} \delta_{\hat{x}_k}$, ceci signifie que la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge vers la mesure de Haar pour la topologie faible*. De façon équivalente, une suite de réels $(x_n)_{n \geq 0}$ est équirépartie modulo un, si pour toute fonction continue $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, périodique de période 1, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il suffit qu'elle vérifie le *critère de Weyl*, c'est-à-dire il suffit que pour tout entier $m \neq 0$, on ait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi m x_k} = 0.$$

Ainsi par exemple, on sait que pour tout nombre irrationnel a , la suite $(na)_{n \geq 0}$ est équirépartie. On vérifie aisément que cette suite vérifie le critère de Weyl, mais on peut également invoquer l'unique ergodicité de la rotation $\hat{x} \mapsto \hat{x} + \hat{a}$, où $\hat{a} = a + \mathbf{Z}$. La proposition 1.2.2 va nous permettre de généraliser cette situation et construire d'autres suites équiréparties plus complexes.

COROLLAIRE 1.2.3 : *Soit P un polynôme réel non constant à coefficient directeur irrationnel. Alors la suite $P(n)_{n \geq 0}$ est équirépartie modulo 1.*

Preuve. On écrit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_r X^r$, où a_r est irrationnel. On définit alors une suite $(P_i)_{0 \leq i \leq r}$ de polynômes par la relation de récurrence $P_i(X) = P_{i+1}(X+1) - P_{i+1}(X)$ et la condition $P_r = P$. Le polynôme P_i est de degré i et de coefficient directeur $r(r-1), \dots, (i+1)a_r$. Posons $\hat{x}^n = (P_1(n), P_2(n), \dots, P_r(n)) + \mathbf{Z}^r$ et remarquons que $\hat{x}^{n+1} = f(\hat{x}^n)$, où

$$\begin{aligned} f : \mathbf{T}^r &\rightarrow \mathbf{T}^r \\ (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_r) &\mapsto (\hat{x}_1 + \hat{a}, \hat{x}_1 + \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{r-1} + \hat{x}_r) \end{aligned}$$

et $\hat{a} = r! a_r$. Pour toute fonction continue $\varphi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}$, on peut définir $\Phi : (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_r) \mapsto \varphi(\hat{x}_r)$. Puisque f est uniquement ergodique, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(P(k) + \mathbf{Z}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(\hat{x}^k) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(f^k(\hat{x}^0)) \\ &= \int_{\mathbf{T}^r} \Phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_r) d\hat{x}_1 \dots d\hat{x}_r \\ &= \int_{\mathbf{T}} \varphi(\hat{x}_r) dx_r \end{aligned}$$

□

1.3 Minimalité.

Nous allons introduire une dernière notion.

PROPOSITION 1.3.1 : *Soit $T : X \rightarrow X$ une transformation continue d'un espace topologique X . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *pour tout $x \in X$, on a $\overline{O^+(x)} = X$;*
- ii) *pour tout $x \in X$, on a $\omega(x) = X$;*
- iii) *si Y est une partie fermée positivement invariante, alors $Y = \emptyset$ ou $Y = X$.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dira que T est positivement minimale.

Preuve. Montrons d'abord que **i)** ou **ii)** implique **iii)**. Soit Y une partie fermée positivement invariante. Si $Y \neq \emptyset$, on peut choisir $x \in Y$. Chacun des ensembles $\overline{O^+(x)}$ et $\omega(x)$ étant contenu dans Y , on en déduit que X est inclus dans Y si **i)** ou **ii)** est vérifiée.

Pour montrer que **iii)** implique **i)**, il suffit de remarquer que $\overline{O^+(x)}$ est une partie fermée non vide positivement invariante. Pour prouver que **i)** implique **ii)**, écrivons

$$\omega(x) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{O^+(T^m(x))} = \bigcap_{m \geq 0} X = X.$$

□

Remarque. Un système dynamique positivement minimal est positivement transitif.

Exemples. L'application

$$\begin{aligned} T_1 : \mathbf{T} &\rightarrow \mathbf{T} \\ \hat{x} &\mapsto 2\hat{x} \end{aligned}$$

n'est pas positivement minimale alors que

$$\begin{aligned} T_2 : \mathbf{T} &\rightarrow \mathbf{T} \\ \hat{x} &\mapsto \hat{x} + \hat{a} \end{aligned}$$

est positivement minimale si $\hat{a} \notin \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

On a une définition analogue pour les homéomorphismes. La preuve du résultat qui suit est similaire à celle de la proposition 1.3.1.

PROPOSITION 1.3.2 : *Soit $T : X \rightarrow X$ un homéomorphisme d'un espace topologique X . Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- i)** *pour tout $x \in X$, on a $\overline{O(x)} = X$;*
- ii)** *si Y est une partie fermée globalement invariante, alors $Y = \emptyset$ ou $Y = X$.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dira que T est minimal.

Remarques.

1. Pour un homéomorphisme, la minimalité positive est plus forte que la minimalité. Par exemple,

$$\begin{aligned} T : \mathbf{Z} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

est minimal mais pas positivement minimal. Néanmoins, si X est compact, les deux notions coïncident (voir exercice 4).

2. La propriété de minimalité est stable par conjugaison. Plus généralement si X et Y sont des espaces topologiques, si $T : X \rightarrow X$ est minimal et si $S : Y \rightarrow Y$ est un facteur de T , alors S est minimal.

3. Un résultat de Gottshalk nous dit qu'il n'existe pas d'homéomorphisme positivement minimal sur \mathbf{R}^n , ni plus généralement sur un espace localement compact qui n'est pas compact (voir exercice 7). On montre facilement qu'il n'y a pas d'homéomorphisme minimal sur \mathbf{R} mais on sait également, d'après un théorème de point fixe dû à Brouwer, qu'il n'y a pas d'homéomorphisme

minimal sur \mathbf{R}^2 . L'existence ou non d'homéomorphisme minimal sur \mathbf{R}^n , est par contre un problème ouvert si $n \geq 3$.

4. On parlera souvent de minimalité, au lieu de minimalité positive dans le cas d'un système dynamique non inversible, en l'absence d'ambiguïté.

Définition. Soit $T : X \rightarrow X$ une transformation continue d'un espace topologique X . Une partie fermée positivement invariante $Y \subset X$ est *positivement minimale* si la transformation restreinte $T|_Y : Y \rightarrow Y$ est positivement minimale.

La proposition qui suit est une conséquence immédiate de la proposition 1.3.1 :

PROPOSITION 1.3.3 : *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) Y est positivement minimal ;
- ii) pour tout $x \in Y$, on a $\overline{O^+(x)} = Y$;
- iii) pour tout $x \in Y$, on a $\omega(x) = Y$;
- iv) Y est un élément minimal, pour l'inclusion, dans l'ensemble des parties fermées non vides et positivement invariantes de X .

Similairement, si $T : X \rightarrow X$ est un homéomorphisme, une partie fermée invariante $Y \subset X$ est *minimale* si l'homéomorphisme restreint $T|_Y : Y \rightarrow Y$ est minimal et on a :

PROPOSITION 1.3.4 : *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) Y est minimal ;
- ii) pour tout $x \in Y$, on a $\overline{O(x)} = Y$;
- ii) Y est un élément minimal, pour l'inclusion, dans l'ensemble des parties fermées non vides et invariantes de X .

Énonçons maintenant le résultat important suivant :

PROPOSITION 1.3.5 : *Soit $T : X \rightarrow X$ une transformation continue d'un espace topologique compact X . Il existe alors une partie fermée positivement minimale $Y \subset X$.*

Preuve. Notons \mathcal{F} l'ensemble des parties fermées non vides positivement invariantes. Il n'est pas vide car il contient X . Remarquons qu'il est inductif pour l'inclusion. En effet, si $(Y_i)_{i \in I}$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de \mathcal{F} , l'ensemble $Y = \bigcap_{i \in I} Y_i$ est fermé, positivement invariant et vérifie $Y \subset Y_i$ pour tout $i \in I$. Pour montrer qu'il est dans \mathcal{F} , il reste à vérifier qu'il n'est pas vide. C'est une conséquence immédiate de la compacité de X et du fait que pour toute partie finie $J \subset I$, on a $Y = \bigcap_{i \in J} Y_i \neq \emptyset$ (puisque la famille est totalement ordonnée). Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme de Zorn pour obtenir un élément minimal de \mathcal{F} . \square

Remarques.

1. Il n'y a pas de partie positivement minimale pour

$$T : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$$

$$x \mapsto x + 1$$

L'ensemble \mathcal{F} est totalement ordonné, il est constitué de \mathbf{Z} et des ensembles $Y_i = \{i, i + 1, \dots\}$. Remarquons que $\bigcap_{i \in \mathbf{Z}} Y_i = \emptyset$.

2. Une preuve analogue à celle de la proposition 1.3.5 nous dit qu'il existe une partie fermée invariante minimale dans le cas où T est un homéomorphisme d'un espace topologique compact X .

Énonçons maintenant un résultat, souvent appelé *Théorème de récurrence de Birkhoff* :

PROPOSITION 1.3.6 : *Si X est compact, toute application continue $T : X \rightarrow X$ a un point positivement récurrent.*

Preuve. Considérons une partie positivement minimale $Y \subset X$ puis choisissons $x \in Y$. \square

Remarque. Dans le cas où X est métrisable, l'existence d'un point récurrent peut aussi se déduire de l'existence d'une mesure de probabilité invariante et du théorème de récurrence de Poincaré. En effet si μ est une mesure borélienne de probabilité invariante, alors μ -presque tout point est récurrent.

CHAPITRE 2 : ENTROPIE TOPOLOGIQUE

Nous allons associer à toute application continue $T : X \rightarrow X$ définie sur un espace topologique compact X une quantité $h(T) \in [0, +\infty]$, invariante par conjugaison, qui mesure le désordre de la dynamique. Cet invariant, *l'entropie topologique*, a été introduit par Adler, Konheim et McAndrew en 1965, par analogie avec l'entropie métrique de Kolmogorov et Sinai.

2.1 Entropie relative par rapport à un recouvrement

Rappelons qu'un recouvrement ouvert d'un espace topologique X est une famille $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de parties ouvertes telle que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Si U est une partie ouverte de X , on écrira $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $i \in I$ tel que $U = U_i$. On dira que le recouvrement $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ est *plus fin* que \mathcal{U} si pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $V_j \subset U_i$, on écrira alors $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$. Un cas particulier est la cas où \mathcal{V} est un *sous-recouvrement* de \mathcal{U} : pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $V_j = U_i$. La relation \preceq est un pré-ordre et on notera \sim la relation d'équivalence associée : $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$ si $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ et $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$.

Si $(\mathcal{U}^j)_{1 \leq j \leq n}$ est une famille finie de recouvrements ouverts de X , on peut définir le recouvrement $\bigvee_{j=1}^n \mathcal{U}^j$ dont les éléments sont les $\bigcap_{1 \leq j \leq n} U^j$ où $U^j \in \mathcal{U}^j$. Il est plus fin que tous les \mathcal{U}^j . Remarquons que si $(\mathcal{V}^j)_{1 \leq j \leq n}$ est une famille finie de recouvrements ouverts de X et si $\mathcal{U}^j \preceq \mathcal{V}^j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, alors $\bigvee_{j=1}^n \mathcal{U}^j \preceq \bigvee_{j=1}^n \mathcal{V}^j$.

Si $H : Y \rightarrow X$ est une application continue entre deux espaces topologiques et si $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X , on peut définir le recouvrement $H^{-1}(\mathcal{U}) = (H^{-1}(U_i))_{i \in I}$ de Y . On a bien évidemment :

- $H^{-1}\left(\bigvee_{j=1}^n \mathcal{U}^j\right) = \bigvee_{j=1}^n H^{-1}(\mathcal{U}^j)$;
- $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} \implies H^{-1}(\mathcal{U}) \preceq H^{-1}(\mathcal{V})$.

Si X est compact, tout recouvrement ouvert \mathcal{U} admet un sous-recouvrement fini. On notera alors $N(\mathcal{U})$ le plus petit cardinal des sous-recouvrements finis. Remarquons que :

- $N(\mathcal{U}) = 1$ si et seulement si $X \in \mathcal{U}$;
- $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} \implies N(\mathcal{U}) \leq N(\mathcal{V})$;
- $\mathcal{U} \sim \mathcal{V} \implies N(\mathcal{U}) = N(\mathcal{V})$;
- $N\left(\bigvee_{j=1}^n \mathcal{U}^j\right) \leq \prod_{j=1}^n N(\mathcal{U}^j)$.

De plus, si $H : Y \rightarrow X$ est une application continue entre deux espaces topologiques compacts, alors

- $N(T^{-1}(\mathcal{U})) \leq N(\mathcal{U})$;
- $N(T^{-1}(\mathcal{U})) = N(\mathcal{U})$ si T est surjective.

On supposera dorénavant que X est compact et que $T : M \rightarrow M$ est continue. Énonçons maintenant le résultat fondamental suivant :

PROPOSITION 2.1.1 : *Pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de X , la suite*

$$\frac{1}{n} \ln \left(N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right) \right)$$

converge. Sa limite $h(T, \mathcal{U})$ est l'entropie topologique de T relativement à \mathcal{U} , elle vérifie :

$$0 \leq h(T, \mathcal{U}) \leq \ln(N(\mathcal{U})).$$

Démonstration. Remarquons que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, où $u_n = N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)$, est sous-multiplicative, elle vérifie $u_{n+m} \leq u_n u_m$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+m} &= N\left(\bigvee_{i=0}^{n+m-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) \\ &= N\left(\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) \vee T^{-n}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)\right) \\ &\leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) N\left(T^{-n}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)\right) \\ &\leq u_n u_m. \end{aligned}$$

Posant $v_n = \ln(u_n)$, on obtient une suite $(v_n)_{n \geq 1}$ qui est donc sous-additive et positive. On sait alors que la suite $(\frac{v_n}{n})_{n \geq 1}$ converge et que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} \leq v_1.$$

□

Énonçons maintenant les propriétés principales de l'entropie relative.

PROPOSITION 2.1.2 : On a les résultats suivants :

- i) $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} \implies h(T, \mathcal{U}) \leq h(T, \mathcal{V})$;
- ii) $h(T, \mathcal{U}) = h(T, \bigvee_{i=0}^m T^{-i}(\mathcal{U}))$ pour tout $m \geq 0$;
- iii) $h(T^m, \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathcal{U})) = m h(T, \mathcal{U})$ pour tout $m \geq 1$;
- iv) $h(T^{-1}, \mathcal{U}) = h(T, \mathcal{U})$ si T est un homéomorphisme ;
- v) $h(T, \mathcal{U}) = h(T, T^{-1}(\mathcal{U})) = h(T, T(\mathcal{U}))$ si T est un homéomorphisme.

Démonstration. L'assertion **i)** découle immédiatement de l'inégalité

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V})\right),$$

conséquence de

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \preceq \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V}).$$

Pour montrer **ii)**, posons $\mathcal{V} = \bigvee_{i=0}^m T^{-i}(\mathcal{U})$ et remarquons d'abord que

$$\bigvee_{i=0}^{m+n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \sim \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V}),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} h(T, \mathcal{U}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+m} \ln \left(N \left(\bigvee_{i=0}^{m+n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+m} \frac{1}{n} \ln \left(N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V}) \right) \right) = h(T, \mathcal{V}). \end{aligned}$$

L'assertion **iii)** se déduit de l'égalité

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-im} \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right) = \bigvee_{i=0}^{nm-1} T^{-i}(\mathcal{U}).$$

Pour montrer **iv)** remarquons que

$$N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i(\mathcal{U}) \right) = N \left(T^n \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right) \right) = N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right),$$

et pour montrer **v)**, que

$$N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(T^{-1}(\mathcal{U})) \right) = N \left(T^{-1} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right) \right) = N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right).$$

□

2.2 Entropie topologique

L'entropie topologique $h(T) \in [0, +\infty]$ est le supremum des entropies relatives aux recouvrements :

$$h(T) = \sup \{ h(T, \mathcal{U}), \mathcal{U} \text{ recouvrement ouvert de } X \}.$$

Énonçons les propriétés principales :

PROPOSITION 2.2.1 : *On a les propriétés suivantes :*

- i)** $h(\text{Id}_X) = 0$;
- ii)** $h(T^n) = nh(T)$, pour tout $n \geq 0$;
- iii)** si T est un homéomorphisme, alors $h(T^k) = |k|h(T)$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$;
- iv)** si $S : Y \rightarrow Y$ est un facteur de T , alors $h(S) \leq h(T)$;
- v)** si $S : Y \rightarrow Y$ est conjugué à T , alors $h(S) = h(T)$;
- vi)** si $Y \subset X$ est fermé et positivement invariant, alors $h(T|_Y) \leq h(T)$.

Démonstration. Si \mathcal{U} est un recouvrement ouvert de X , alors pour tout entier $n \geq 1$, on a $\bigvee_{i=0}^{n-1} \text{Id}_X^{-i}(\mathcal{U}) \sim \mathcal{U}$, ce qui bien sûr implique **i)**.

Pour montrer **ii)** dans le cas où $n \geq 1$ (dans le cas où $n = 0$ ce n'est rien d'autre que **i)**) remarquons que pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} , on a

$$h(T^n, \mathcal{U}) \leq h \left(T^n, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right) = nh(T, \mathcal{U}),$$

ce qui implique

$$h(T^n, \mathcal{U}) \leq nh(T), \quad nh(T, \mathcal{U}) \leq h(T^n),$$

et donc

$$h(T^n) \leq nh(T), \quad nh(T) \leq h(T^n)$$

en passant aux supremums.

L'assertion **iii)** se déduit immédiatement de l'égalité $h(T, \mathcal{U}) = h(T^{-1}, \mathcal{U})$.

Pour prouver **iv)**, considérons une semi-conjugaison $H : X \rightarrow Y$ entre T et S . Pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de Y , et tout entier $n \geq 1$, on a

$$H^{-1} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}(\mathcal{U}) \right) = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(H^{-1}(\mathcal{U}))$$

ce qui implique, puisque H est surjective, que

$$N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}(\mathcal{U}) \right) = N \left(H^{-1} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}(\mathcal{U}) \right) \right) = N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(H^{-1}(\mathcal{U})) \right)$$

On en déduit que

$$h(S, \mathcal{U}) = h(T, H^{-1}(\mathcal{U})) \leq h(T),$$

puis en passant au supremum que $h(S) \leq h(T)$. On en déduit alors immédiatement **iv)**.

Pour prouver **vi)** considérons un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ de Y . Pour tout $i \in I$, on peut choisir une partie ouverte U_i de X telle que $V_i = Y \cap U_i$. Si on ajoute $X \setminus Y$ à cette famille, on obtient un recouvrement ouvert \mathcal{U} de X . Remarquons maintenant que

$$N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (T|_Y)^{-i}(\mathcal{V}) \right) \leq N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right).$$

En effet, puisque $T(Y) \subset Y$, on sait qu'aucun des ensembles $T^{-i}(X \setminus Y)$ ne rencontre Y . Ceci implique que pour tout sous-recouvrement fini \mathcal{U}' de $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})$, tout élément non vide de $Y \cap \mathcal{U}'$, $U' \in \mathcal{U}'$, appartient à $\bigvee_{i=0}^{n-1} (T|_Y)^{-i}(\mathcal{V})$. On en déduit que

$$h(T|_Y, \mathcal{V}) \leq h(T, \mathcal{U}) \leq h(T),$$

puis en passant au supremum que $h(T|_Y) \leq h(T)$. □

2.3 Recouvrement générateur

Il est bien évidemment difficile de calculer l'entropie topologique à partir de la définition abstraite précédente. Nous verrons dans ce paragraphe qu'on peut se restreindre à certains recouvrements. Nous dirons qu'une famille $(\mathcal{U}^\alpha)_{\alpha \in A}$ de recouvrements ouverts est une *famille génératrice* si, pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} , il existe $\alpha \in A$ tel que $\mathcal{U} \preceq \mathcal{U}^\alpha$. Nous avons bien évidemment :

PROPOSITION 2.3.1 : *Si $(\mathcal{U}^\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille génératrice de recouvrements ouverts, alors*

$$h(T) = \sup_{\alpha \in A} h(T, \mathcal{U}^\alpha).$$

Un exemple simple de famille génératrice est donné par les recouvrements finis, un autre exemple est donné, dans le cas où X est un espace métrique, par la famille $(\mathcal{U}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, où $\mathcal{U}^\varepsilon = (B(x, \varepsilon))_{x \in X}$ est le recouvrement par les boules de rayon ε . Le caractère générateur de cette famille n'est rien d'autre que le lemme de recouvrement de Lebesgue : *pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} , il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule $B(x, \varepsilon)$ est contenue dans une partie ouverte $U \in \mathcal{U}$* . Remarquons que la fonction $\varepsilon \mapsto h(T, \mathcal{U}^\varepsilon)$ est décroissante et donc que

$$h(T) = \sup_{\varepsilon>0} h(T, \mathcal{U}^\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h(T, \mathcal{U}^\varepsilon).$$

Dans le cas d'un espace métrique, on peut donner une caractérisation des familles génératrices, grâce au lemme de recouvrement de Lebesgue. Définissons le diamètre d'un recouvrement \mathcal{U} :

$$\text{diam}(\mathcal{U}) = \sup_{U \in \mathcal{U}} \text{diam}(U),$$

où

$$\text{diam}(U) = \sup_{x \in U, y \in U} d(x, y).$$

Supposons maintenant que $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de recouvrements ouverts, c'est-à-dire une suite vérifiant $\mathcal{U}_n \preceq \mathcal{U}_{n+1}$, pour tout $n \geq 0$. Cette suite est génératrice si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(\mathcal{U}_n) = 0$. Dans ce cas, on a

$$h(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(T, \mathcal{U}_n).$$

Dans de nombreux exemples, une suite génératrice peut être définie à partir d'un seul recouvrement. Plus précisément, on dira qu'un recouvrement ouvert U de X est un *recouvrement générateur* si la suite $(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(U))_{n \geq 1}$ est génératrice.

PROPOSITION 2.3.2 : *Si \mathcal{U} est un recouvrement générateur de X , alors*

$$h(T) = h(T, \mathcal{U}) < +\infty.$$

Démonstration. On a

$$h(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(T, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(U)) = h(T, \mathcal{U}).$$

□

La remarque précédente sur la famille $(\mathcal{U}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ va nous permettre de donner, dans le cas d'un espace métrique, une définition alternative de l'entropie topologique, définition due de façon indépendante à Bowen et Dinaburg. Définissons, pour tout entier $n \geq 1$, la distance suivante d_n sur X :

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^i(x), T^i(y)),$$

et notons $B_n(x, \varepsilon)$ la boule ouverte de rayon ε et de centre x . Soient $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$. On dira qu'un ensemble fini $S \subset X$ est (n, ε) -séparé si, pour tous points x et y de S , on a $d_n(x, y) \geq \varepsilon$. De même, on dira qu'un ensemble fini $R \subset X$ est (n, ε) -couvrant si, pour tout $x \in X$, il

existe $y \in R$ tel que $d_n(x, y) < \varepsilon$. On notera alors $s(n, \varepsilon)$ le plus grand cardinal des ensembles (n, ε) -séparés et $r(n, \varepsilon)$ le plus petit cardinal des ensembles (n, ε) -couvrants. Enfin, on écrira $N(n, \varepsilon) = N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}^\varepsilon)\right)$. Ces nombres sont naturellement liés, comme l'exprime le résultat suivant :

PROPOSITION 2.3.3 : *On a*

$$N(n, \varepsilon) \leq r(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon) \leq N(n, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Démonstration. Pour montrer la première inégalité, choisissons un ensemble R de cardinal $r(n, \varepsilon)$ qui est (n, ε) -couvrant. Les boules $B_n(x, \varepsilon)$, $x \in R$, recouvrent X et appartiennent toutes à $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}^\varepsilon)$. Pour montrer la seconde inégalité, remarquons qu'un ensemble (n, ε) -séparé S de cardinal maximal $s(n, \varepsilon)$ est nécessairement $(n, \frac{\varepsilon}{2})$ -couvrant. Enfin, pour montrer la dernière égalité, remarquons qu'une partie $U \in \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}^{\frac{\varepsilon}{2}})$ contient au plus un élément de S . □

COROLLAIRE 2.3.4 : *On a*

$$\begin{aligned} h(T) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln N(n, \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln s(n, \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln s(n, \varepsilon). \end{aligned}$$

Démonstration. L'égalité

$$h(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln N(n, \varepsilon)$$

est une conséquence, vue plus haut, du caractère générateur de la famille $(\mathcal{U}^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$. L'égalité analogue, où l'on remplace $N(n, \varepsilon)$ par $r(n, \varepsilon)$ ou $s(n, \varepsilon)$ n'est pas nécessairement vraie, car rien ne dit que les suites $\left(\frac{1}{n} \ln s(n, \varepsilon)\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon)\right)_{n \geq 1}$ convergent. Cependant, la proposition précédente permet d'obtenir les quatre dernières égalités. □

COROLLAIRE 2.3.5 : *Si $T : X \rightarrow X$ est lipschitzienne de rapport 1, c'est-à-dire si $d(T(x), T(y)) \leq d(x, y)$ pour tous x, y dans X , alors $h(T) = 0$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la distance d_n coïncide avec la distance d , et que les entiers $r(n, \varepsilon)$ et $s(n, \varepsilon)$ sont donc indépendants de n . □

2.4. Exemples

i) Le décalage de Bernouilli unilatéral :

Notons

$$\begin{aligned}\sigma &: A^{\mathbf{N}} \rightarrow A^{\mathbf{N}}, \\ (x_n)_{n \geq 0} &\mapsto (x_{n+1})_{n \geq 0}\end{aligned}$$

le décalage de Bernouilli, où A est un alphabet fini de cardinal $p \geq 2$. Le recouvrement $\mathcal{U} = (U_a)_{a \in A}$ formé des p cylindres $U_a = \{x = (x_n)_{n \geq 0} \in A^{\mathbf{N}} \mid x_0 = a\}$ est générateur. En effet, le recouvrement $\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{U})$ est formé des cylindres à base $\{0, \dots, n-1\}$. On a p^n cylindres disjoints dont les diamètres tendent vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi, on a

$$h(T) = h(T, \mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{U}) \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln p^n = \ln p.$$

ii) Le décalage de Bernouilli bilatéral :

Notons

$$\begin{aligned}\sigma &: A^{\mathbf{Z}} \rightarrow A^{\mathbf{Z}}, \\ (x_k)_{k \in \mathbf{Z}} &\mapsto (x_{k+1})_{k \in \mathbf{Z}}\end{aligned}$$

le décalage de Bernouilli, où A est un alphabet fini de cardinal $p \geq 2$. On pourrait montrer qu'il n'y pas de recouvrement générateur (au sens donné plus haut). Cependant si on considère le recouvrement $\mathcal{U} = (U_a)_{a \in A}$ formé des p cylindres $U_a = \{x \in A^{\mathbf{Z}} \mid x_0 = a\}$, on peut remarquer que la famille $\left(\bigvee_{i=-n+1}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{U}) \right)_{n \geq 0}$ est génératrice. Ainsi

$$h(\sigma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h \left(\sigma, \bigvee_{i=-n+1}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{U}) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h \left(\sigma, \bigvee_{i=0}^{2n-2} \sigma^{-i}(\mathcal{U}) \right) = h(\sigma, \mathcal{U}) = \ln p.$$

iii) Endomorphismes linéaires de \mathbf{T}^1 .

On considère l'application $T : x \rightarrow px$ sur le cercle $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, où $|p| \geq 2$. On va montrer que

$$h(T) = \ln |p|.$$

Puisque $h(T^2) = 2h(T)$ et puisque $T^2(x) = p^2x$, il suffit d'étudier le cas où $p \geq 2$. On pourrait montrer que T est un facteur du décalage unilatéral sur $\{1, \dots, p\}^{\mathbf{N}}$ et donc que $h(T) \leq \ln p$. Pour prouver que $h(T) = \ln p$ il suffit de trouver un recouvrement \mathcal{U} tel que $h(T, \mathcal{U}) \geq \ln p$. Considérons un recouvrement \mathcal{U} par des intervalles ouverts I de diamètre constant $\delta < \frac{1}{p+1}$.

Pour tout $I \in \mathcal{U}$, l'ensemble $T^{-1}(I)$ est la réunion de p intervalles de longueur $\frac{\delta}{p}$ séparés par des intervalles de longueur $\frac{1-\delta}{p}$. Puisque $\delta < \frac{1-\delta}{p}$ on sait que pour tout intervalle $I' \in \mathcal{U}$ l'ensemble $I' \cap T^{-1}(I)$ est un intervalle (éventuellement vide) de longueur $\leq \frac{\delta}{p}$. Ainsi on a $\text{diam}(\mathcal{U} \vee T^{-1}(\mathcal{U})) \leq \frac{\delta}{p}$. Le même argument nous dit que $\mathcal{U} \vee T^{-1}(\mathcal{U}) \vee T^{-2}(\mathcal{U})$ est un recouvrement par des intervalles de longueur $\leq \frac{\delta}{p^2}$ et plus généralement que $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})$ est un recouvrement par intervalles et que

$$\text{diam} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right) \leq \frac{\delta}{p^{n-1}}.$$

On en déduit que \mathcal{U} est un recouvrement générateur et que $h(T) = h(T, \mathcal{U})$. Remarquons maintenant que

$$N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right) \geq \frac{p^{n-1}}{\delta} \geq p^n,$$

et donc que $h(T, \mathcal{U}) \geq \ln p$.

Si l'on ne veut pas utiliser le fait que T est un facteur du décalage de Bernouilli, on peut remarquer que \mathcal{U} peut être choisi de telle façon que $N(\mathcal{U}) = p + 2$. Ainsi a-t-on

$$\ln p \leq h(T) = h(T, \mathcal{U}) \leq \ln N(\mathcal{U}) = \ln(p + 2).$$

En fait, pour tout $r \geq 1$, on a

$$\ln p^r \leq h(T^r) = rh(T) \leq \ln(p^r + 2)$$

et donc $h(T) = \ln p$.

2.5 Entropie topologique et entropie métrique

Si $T : X \rightarrow X$ est une application continue définie sur un espace topologique compact métrisable, on sait que l'ensemble \mathcal{M}_T des mesures boréliennes de probabilité invariantes est une partie compacte (pour la topologie faible*) convexe et non vide. On peut définir l'entropie $h_\mu(T)$ de toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_T$. Nous allons nous intéresser dans cette section au lien entre l'entropie topologique et les entropies métriques des mesures invariantes. Le résultat principal, appelé usuellement *principe variationnel pour l'entropie*, a été prouvé par Goodwyn (une des inégalités) et Goodman (égalité), nous allons donner une preuve due à Misiurewicz :

THÉORÈME 2.5.1 : *Si $T : X \rightarrow X$ est une application continue définie sur un espace topologique compact métrisable, alors*

$$h(T) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_T} h_\mu(T).$$

Démonstration. Nous allons commencer par prouver l'inégalité $h_\mu(T) \leq h(T)$ pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_T$. Nous utiliserons la régularité de μ .

LEMME 2.5.2 : *Une mesure borélienne de probabilité sur un espace topologique compact métrisable est régulière : pour tout borélien A et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie fermée F et une partie ouverte U telle que $F \subset A \subset U$ et $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que l'ensemble \mathcal{C} des boréliens qui vérifient la condition du lemme est une σ -algèbre qui contient les parties fermées. L'ensemble \mathcal{C} est stable par passage au complémentaire et contient X , pour montrer que c'est une σ -algèbre, il reste à prouver qu'il est stable par réunion dénombrable. Soit $(A_m)_{m \geq 0}$ une suite dans \mathcal{C} . Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons pour tout $m \geq 0$ une partie fermée F_m et une partie ouverte U_m telles que $F_m \subset A_m \subset U_m$ et $\mu(U_m \setminus F_m) < \varepsilon/2^{m+1}$. Remarquons que

$$\bigcup_{m \geq 0} F_m \subset \bigcup_{m \geq 0} A_m \subset \bigcup_{m \geq 0} U_m$$

et que

$$\mu \left(\bigcup_{m \geq 0} U_m \setminus \bigcup_{m \geq 0} F_m \right) \leq \mu \left(\bigcup_{m \geq 0} (U_m \setminus F_m) \right) \leq \sum_{m=0}^{+\infty} \mu(U_m \setminus F_m) < \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} = \varepsilon.$$

Ceci implique qu'il existe $m_0 \geq 0$ tel que

$$\mu \left(\bigcup_{m \geq 0} U_m \setminus \bigcup_{0 \leq m \leq m_0} F_m \right) < \varepsilon.$$

On en déduit que $A \in \mathcal{C}$ car $U = \bigcup_{m \geq 0} U_m$ est ouvert et $\bigcup_{0 \leq m \leq m_0} F_m$ est fermé.

Nous devons montrer maintenant que toute partie fermée F appartient à \mathcal{C} . Considérons une distance d définissant la topologie de X et remarquons que $F = \bigcap_{m \geq 1} U_m$, où

$$U_m = \left\{ x \in X \mid d(x, F) < \frac{1}{m} \right\}$$

est ouvert. On en déduit que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mu(U_m \setminus F) = \mu \left(\bigcap_{m \geq 1} U_m \setminus F \right) = 0.$$

□

Prouvons maintenant que $h_\mu(T) \leq h(T)$ si $\mu \in \mathcal{M}_T$. Nous allons en fait montrer que

$$h_\mu(T) \leq 1 + \ln 2 + h(T).$$

En appliquant cette formule à chaque itéré T^m , $m \geq 1$, on obtiendra

$$mh_\mu(T) = h_\mu(T^m) \leq 1 + \ln 2 + h(T^m) = 1 + \ln 2 + mh(T).$$

Il restera alors à diviser par m et à faire tendre m vers $+\infty$ pour obtenir

$$h_\mu(T) \leq h(T).$$

Choisissons une partition mesurable $\mathcal{P} = (P_i)_{1 \leq i \leq r}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ on peut trouver une partie fermée $Q_i \subset P_i$ telle que $\mu(P_i \setminus Q_i) < \varepsilon$. Posons

$$Q_0 = X \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq r} Q_i, \quad P_0 = \emptyset.$$

Nous avons deux partitions mesurables $\mathcal{Q} = (Q_i)_{0 \leq i \leq r}$ et $\mathcal{P}' = (P_i)_{0 \leq i \leq r}$ telles que $\mu(P_i \Delta Q_i) \leq r\varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ (puisque $\mu(P_0 \Delta Q_0) = \mu(Q_0) \leq r\varepsilon$). On en déduit que si ε est assez petit, alors

$$H(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = H(\mathcal{P}'|\mathcal{Q}) \leq 1.$$

Ceci implique que

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) \leq h_\mu(T, \mathcal{Q}) + H(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \leq h_\mu(T, \mathcal{Q}) + 1.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ on définit maintenant

$$U_i = Q_0 \cup Q_i = X \setminus \left(\bigcup_{1 \leq j \leq r, j \neq i} Q_j \right).$$

On obtient un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq r}$. Chaque élément

$$\bigcap_{0 \leq k < n} T^{-k}(U_{i_k}) = \bigcap_{0 \leq k < n} T^{-k}(Q_0 \cup Q_{i_k})$$

du recouvrement $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathcal{U})$ est la réunion de 2^n éléments de la partition $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathcal{Q})$ (certains éventuellement vides). Si R est le nombre d'éléments non vides de la partition $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathcal{Q})$, on en déduit que

$$H_\mu \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathcal{Q}) \right) \leq \ln R \leq \ln \left(2^n N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathcal{U}) \right) \right).$$

En divisant par n et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$h_\mu(T, \mathcal{Q}) \leq \ln 2 + h(T, \mathcal{U}) \leq \ln 2 + h(T),$$

puis

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) \leq 1 + \ln 2 + h(T).$$

Il reste à passer au supremum pour obtenir l'inégalité cherchée.

$$h_\mu(T) \leq 1 + \ln 2 + h(T).$$

□

Nous allons maintenant montrer l'inégalité inverse

$$h(T) \leq \sup_{\mu \in \mathcal{M}_T} h_\mu(T),$$

et pour cela commencer par quelques lemmes.

LEMME 2.5.3 : *Soit X un espace métrique compact et $(\mu_m)_{m \geq 0}$ une suite de mesures boréliennes de probabilité qui converge vers μ pour la topologie faible*. Alors, pour tout borélien A tel que $\mu(\partial A) = 0$, on a*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mu_m(A) = \mu(A).$$

Démonstration. Définissons une suite de fonctions continues $(f_k)_{k \geq 1}$ sur X , en posant

$$f_k : x \mapsto \max(1 - kd(x, A), 0).$$

La suite $(f_k)_{k \geq 1}$ est décroissante et converge vers la fonction caractéristique $\chi_{\bar{A}}$. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \mu_m(A) \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \int f_k d\mu_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int f_k d\mu_m = \int f_k d\mu.$$

Ceci implique que

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \mu_m(A) \leq \inf_{k \geq 1} \int f_k d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k d\mu = \mu(\overline{A}).$$

Le même raisonnement appliqué au complémentaire de A nous dit que

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \mu_m(A) \geq \mu(\text{Int}(A)).$$

Puisque, par hypothèse on a $\mu(\overline{A}) = \mu(\text{Int}(A))$, on peut conclure. \square

LEMME 2.5.4 : *Soit X un espace métrique compact et μ une mesure borélienne de probabilité. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition borélienne $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, on a $\text{diam}(P_i) \leq \varepsilon$ et $\mu(\partial P_i) = 0$.*

Démonstration. Pour tout $x \in X$ il existe $\varepsilon_x \in]0, \varepsilon/2[$ tel que

$$\mu(\{x' \in X \mid d(x, x') = \varepsilon_x\}) = 0.$$

ce qui implique que $\mu(\partial B(x, \varepsilon_x)) = 0$. Considérons un sous-recouvrement fini $(U_i)_{1 \leq i \leq r}$ du recouvrement $(B(x, \varepsilon_x))_{x \in X}$ et définissons une partition mesurable $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ en posant

$$P_i = U_i \setminus \bigcup_{1 \leq i' < i} U_{i'}.$$

Chaque U_i a un diamètre inférieur à ε et sa frontière est de mesure nulle puisqu'elle est incluse dans $\bigcup_{1 \leq i \leq r} \partial U_i$. \square

LEMME 2.5.5 : *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu \in \mathcal{M}_T$ tel que*

$$h_\mu(T) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(s(n, \varepsilon)).$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, choisissons un ensemble (n, ε) -séparé S_n de cardinal $s(n, \varepsilon)$. Considérons ensuite les mesures

$$\nu_n = \frac{1}{s(n, \varepsilon)} \sum_{x \in S_n} \delta_x$$

et

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T_*^i(\nu_n).$$

On peut trouver une suite strictement croissante $(n_k)_{k \geq 0}$ dans \mathbf{N} telle que, d'une part, on ait

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \ln(s(n_k, \varepsilon)) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(s(n, \varepsilon))$$

et telle que, d'autre part, la suite $(\mu_{n_k})_{k \geq 0}$ converge pour la topologie faible* vers une mesure de probabilité μ . Cette mesure μ est alors invariante. En effet, pour toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, on a

$$\int (f \circ T - f) d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int (f \circ T - f) d\mu_{n_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \int (f \circ T^{n_k} - f) d\nu_{n_k} = 0,$$

puisque

$$\left| \int (f \circ T^{n_k} - f) d\nu_{n_k} \right| \leq 2 \max_{x \in X} |f(x)|,$$

(nous venons de refaire l'argument de la preuve du théorème de Krylov-Bogolyubov). Nous allons montrer que μ satisfait la conclusion du lemme.

Fixons une partition borélienne $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, on ait $\text{diam}(P_i) \leq \varepsilon$ et $\mu(\partial P_i) = 0$. On va montrer que

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(s(n, \varepsilon)),$$

ce qui prouvera le lemme puisque $h_\mu(T) \geq h_\mu(T, \mathcal{P})$. Définissons la suite de partitions $(\mathcal{P}^n)_{n \geq 1}$ où $\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{P})$. Puisque S_n est (n, ε) -séparé, chaque élément de \mathcal{P}^n contient au plus un point de S_n , ce qui implique que

$$H_{\nu_n}(\mathcal{P}^n) = \ln s(n, \varepsilon).$$

SOUS-LEMME 2.5.6 : *Pour toute partition borélienne $\mathcal{Q} = (Q_j)_{j \in J}$ et tous entiers $q \leq n$, on a*

$$qH_{\nu_n}(\mathcal{Q}^n) \leq nH_{\mu_n}(\mathcal{Q}^q) + 2q^2 \ln(\#J),$$

où $\mathcal{Q}^m = \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathcal{Q})$.

Démonstration. Fixons $q \geq 1$. Pour tout $r < q$ on a

$$\mathcal{Q}^n = \left(\bigvee_{j=0}^{j_r-1} T^{-jq-r}(\mathcal{Q}^q) \right) \vee \left(\bigvee_{i=0}^{r-1} T^{-i}(\mathcal{Q}) \right) \vee \left(\bigvee_{i=qj_r+r}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{Q}) \right),$$

où j_r est l'entier tel que

$$n-1-q < r + qj_r - 1 \leq n-1.$$

On obtient

$$\begin{aligned} H_{\nu_n}(\mathcal{Q}^n) &\leq \sum_{j=0}^{j_r-1} H_{\nu_n}(T^{-jq-r}(\mathcal{Q}^q)) + \sum_{i=0}^{r-1} H_{\nu_n}(T^{-i}(\mathcal{Q})) + \sum_{i=qj_r+r}^{n-1} H_{\nu_n}(T^{-i}(\mathcal{Q})) \\ &\leq \sum_{j=0}^{j_r-1} H_{\nu_n}(T^{-jq-r}(\mathcal{Q}^q)) + 2q \ln(\#J). \end{aligned}$$

En sommant sur r , on obtient

$$qH_{\nu_n}(\mathcal{Q}^n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} H_{\nu_n}(T^{-i}(\mathcal{Q}^q)) + 2q^2 \ln(\#J).$$

Pour obtenir le résultat, on va maintenant utiliser la concavité de la fonction $\phi : t \mapsto -t \ln t$. En effet, pour toute partition borélienne $\mathcal{S} = (S_k)_{j \in K}$, on a

$$\begin{aligned}
H_{\mu_n}(\mathcal{S}) &= \sum_{k \in K} \phi(\mu_n(S_k)) \\
&= \sum_{k \in K} \phi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T_*^i(\nu_n)(S_k)\right) \\
&\geq \sum_{k \in K} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi\left(T_*^i(\nu_n)(S_k)\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} H_{T_*^i \nu_n}(\mathcal{S}), \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} H_{\nu_n}(T^{-i}(\mathcal{S})).
\end{aligned}$$

□

Si on applique le sous-lemme à la partition \mathcal{P}_{n_k} et qu'on divise par qn_k , on obtient :

$$\frac{1}{n_k} \ln(s(n_k, \varepsilon)) = \frac{1}{n_k} H_{\nu_{n_k}}(\mathcal{P}^{n_k}) \leq \frac{1}{q} H_{\mu_{n_k}}(\mathcal{P}^q) + \frac{2q}{n_k} \ln(\#I).$$

Puisque la frontière de chaque élément de \mathcal{P}^q est de mesure nulle, on obtient, en faisant tendre k vers $+\infty$:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(s(n, \varepsilon)) \leq \frac{1}{q} H_{\mu}(\mathcal{P}^q),$$

Faisons tendre maintenant q vers $+\infty$, pour obtenir

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(s(n, \varepsilon)) \leq h_{\mu}(T, \mathcal{P}) \leq h_{\mu}(T).$$

□

La preuve de la seconde partie du théorème, c'est-à-dire l'inégalité

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}_T} h_{\mu}(T) \geq h(\mu)$$

découle alors immédiatement de l'égalité

$$h(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln s(n, \varepsilon).$$

□

On peut se demander si l'entropie topologique est atteinte par une mesure, c'est-à-dire s'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_T$ telle que $h_{\mu}(T) = h(T)$. Ceci serait vrai, si l'application $\mu \mapsto h_{\mu}(T)$ était continue (ou même semi-continue supérieurement) pour la topologie faible* puisque \mathcal{M}_T est compact. Malheureusement cette application n'est généralement pas continue et il se peut que l'entropie topologique ne soit pas atteinte. Cependant, comme nous allons le voir, c'est le cas dès que l'application T est *expansive*, c'est-à-dire s'il existe ε_0 (constante d'expansivité) tel que pour tous points distincts x et y , il existe $n \geq 0$ tel que $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \varepsilon_0$.

PROPOSITION 2.5.7 : Soit $T : X \rightarrow X$ une application expansive définie sur un espace métrique compact X . Il existe $\mu \in \mathcal{M}_T$ tel que

$$h_\mu(T) = h(T).$$

Démonstration. On vérifie facilement que le recouvrement $\mathcal{U}^{\varepsilon_1}$ par les boules ouvertes de rayon ε_1 est générateur, si $2\varepsilon_1$ est une constante d'expansivité. On en déduit que

$$h(T) = h(T, \mathcal{U}^{\varepsilon_1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(N(n, \varepsilon_1)),$$

où

$$N(n, \varepsilon) = N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{U}^\varepsilon.\right)$$

On a vu précédemment que $N(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon)$ et donc que

$$h(T) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(s(n, \varepsilon_1)),$$

et on vient juste de voir qu'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_T$ telle que

$$h_\mu(T) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(s(n, \varepsilon_1))$$

□

En fait dans le cas d'un système expansif, l'application $\mu \mapsto h_\mu(T)$ est semi-continue supérieurement. Les cas les plus simples de systèmes dynamiques expansifs sont donnés par le décalage de Bernoulli unilatéral $\sigma : A^{\mathbf{N}} \rightarrow A^{\mathbf{N}}$, où A est un alphabet fini de cardinal $p \geq 2$, et les endomorphismes du cercle $T : x \rightarrow px$, où $|p| \geq 2$. Dans le premier cas la mesure équirépartie, c'est-à-dire celle pour laquelle tout cylindre

$$C(m, a_0, a_1, \dots, a_m) = \{(x_n)_{n \geq 0} \mid x_i = a_i \text{ si } i \leq m\}$$

est de mesure $\frac{1}{p^{m+1}}$, a une entropie égale à $\ln p = h(\sigma)$; dans le second cas la mesure de Lebesgue a une entropie égale à $\ln |p| = h(T)$. On peut se demander également si l'entropie topologique peut-être atteinte par plusieurs mesures. La réponse est évidemment oui (pensons au cas où l'entropie est nulle et où il y a plusieurs mesures invariantes, une rotation d'angle rationnel par exemple) ou plus simplement, même dans le cas d'une entropie strictement positive, prenons la réunion disjointe de deux systèmes dynamiques. Nous verrons cependant que pour les systèmes "hyperboliques" il n'y a généralement qu'une seule mesure invariante d'entropie maximale. Nous allons commencer par un modèle-type de ces systèmes, les sous-décalages de type fini.

3.1. Décalage de Bernouilli

Soit A un ensemble fini de cardinal $p \geq 2$. Si on munit A de la topologie discrète, on peut munir l'ensemble $X = A^{\mathbf{N}}$ des suites $x = (x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans A de la topologie produit.

Pour tout mot $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in A^m$ et tout $n_0 \geq 0$ on peut définir le *cylindre*

$$C_w^{n_0} = \{x = (x_n)_{n \geq 0} \in A^{\mathbf{N}} \mid x_{n+n_0} = w_n \text{ pour tout } n \in \{0, \dots, m-1\}\}.$$

La topologie est alors engendrée par les cylindres. L'espace X est un ensemble compact métrisable (pouvant d'ailleurs être muni d'une distance ultramétrique) totalement discontinu et sans point isolé (on dit que X est un ensemble de Cantor).

Le décalage de Bernouilli (unilatéral) est la transformation continue

$$\begin{aligned} \sigma : X &\rightarrow X \\ (x_n)_{n \geq 0} &\mapsto (x_{n+1})_{n \geq 0} \end{aligned}$$

On sait alors que pour tout $q \geq 1$ l'application σ^q a p^q points fixes obtenus par concaténation d'un même mot de longueur q dans l'alphabet A . On sait que l'ensemble des points périodiques sont denses, et que le décalage de Bernouilli est transitif. Mieux, il est topologiquement mélangeant : si U et V sont deux parties ouvertes de X , il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$.

Le décalage de Bernouilli admet un recouvrement générateur, à savoir le recouvrement $\mathcal{C} = (C_w^0)_{w \in A}$, où

$$C_w^0 = \{x = (x_n)_{n \geq 0} \in A^{\mathbf{N}} \mid x_0 = w\},$$

et on a

$$h(T) = h(T, \mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{C}) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln p^n = \ln p.$$

Le fait que σ admette un recouvrement générateur nous dit que σ est (positivement) expansif pour toute distance sur X définissant la topologie produit. Il en est ainsi par exemple de la distance d_α associée à $\alpha \in]0, 1[$ et définie ainsi :

$$\begin{cases} d_\alpha(x, y) = \alpha^{N(x, y)} & \text{si } x \neq y, \\ d_\alpha(x, y) = 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$$

où $N(x, y)$ est le premier entier $n \geq 0$ tel que $x_n \neq y_n$. Si $x \neq y$, il existe $n \geq 0$ tel que $d_\alpha(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \geq \alpha$. L'entropie topologique est donc atteinte par une mesure invariante. Le recouvrement $\mathcal{C} = (C_w^0)_{w \in A}$ étant également une partition génératrice, on a

$$h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{C}) \right).$$

Les propriétés de l'entropie métrique nous disent que pour tout $n \geq 1$, on a

$$h_\mu(T) \leq \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{C}) \right)$$

et que

$$H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{C}) \right) \leq \ln p^n$$

avec égalité si et seulement la partition $\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{C})$ est équilibrée. Ainsi, il existe une unique mesure sur X qui maximise l'entropie, il s'agit de la mesure produit équilibrée, telle que $\mu(C_w^{n_0}) = p^{-n}$ pour tout cylindre associé à un entier n_0 et à un mot $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in A^m$.

Si on considère maintenant l'ensemble $X = A^{\mathbf{Z}}$ des suites bilatérales $x = (x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ à valeurs dans A , muni de la topologie produit, on obtient encore un ensemble de Cantor, dont la topologie est engendrée par les cylindres

$$C_w^{k_0} = \{x = (x_k)_{k \in \mathbf{Z}} \in A^{\mathbf{Z}} \mid x_{n+k_0} = w_n \text{ pour tout } n \in \{0, \dots, m-1\}\}.$$

définis pour tout entier $k_0 \in \mathbf{Z}$ et tout mot $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in A^m$. Le décalage bilatéral

$$\begin{aligned} \sigma : X &\rightarrow X \\ (x_k)_{k \in \mathbf{Z}} &\mapsto (x_{k+1})_{k \in \mathbf{Z}} \end{aligned}$$

est maintenant un homéomorphisme, qui est également topologiquement mélangeant. Le recouvrement $\mathcal{C} = (C_w^0)_{w \in A}$, où

$$C_w^0 = \{x = (x_k)_{k \in \mathbf{Z}} \in A^{\mathbf{Z}} \mid x_0 = w\},$$

est générateur (mais pas fortement générateur). On a donc

$$h(T) = h(T, \mathcal{C}) = \ln p.$$

Comme dans le cas unilatéral, on montre que la seule mesure d'entropie maximale $\ln p$ est la mesure produit équilibrée.

Le fait que le décalage de Bernoulli soit expansif implique que pour toute partie fermée invariante Y , l'entropie topologique de la restriction $\sigma|_Y$ est atteinte par une mesure de probabilité invariante à support dans Y . Nous allons voir une classe de parties invariantes où l'entropie topologique peut être calculée et où la mesure maximisante est unique et peut être calculée.

3.2 Sous-décalages de type fini

On s'intéressera aux sous-décalages bilatéraux, on pourrait définir de même les sous-décalages unilatéraux. On se donne une matrice carrée $A = (A_{i,j})_{i,j}$ d'ordre p à coefficients égaux à 0 ou 1. L'ensemble

$$X_A = \{\mathbf{i} = (i_k)_{k \in \mathbf{Z}} \in \{1, \dots, p\}^{\mathbf{Z}} \mid A_{i_k, i_{k+1}} = 1 \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z}\}$$

est fermé et invariant par le décalage $\sigma : (i_k)_{k \in \mathbf{Z}} \rightarrow (i_{k+1})_{k \in \mathbf{Z}}$. La restriction $\sigma_A = \sigma|_{X_A}$ est un *sous-décalage de type fini*.

On supposera qu'il existe toujours un 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne. Si pour tout $k_0 \in \mathbf{Z}$ et tout $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in \{1, \dots, p\}^m$, on pose $U_w^{k_0} = C_w^{k_0} \cap X_A$, cette condition exprime que $U_w^{k_0}$ est non vide si et seulement si w est *admissible*, c'est-à-dire si $A_{w_k, w_{k+1}} = 1$ pour tout $k \in \{0, \dots, m-2\}$. On dira que w est de longueur $n-1$ et qu'il *joint* w_0 à w_{n-1} . la

topologie de X_A est engendrée par les cylindres admissibles, c'est-à-dire les ensembles $U_w^{k_0}$ qui sont non vides. On dira que la *base* d'un tel cylindre est $\{k_0, \dots, n-1+k_0\}$.

Nous allons étudier la dynamique de σ_A et en particulier calculer son entropie. Rappelons d'abord la définition du rayon spectral d'un endomorphisme.

PROPOSITION 3.2.1 : *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension p et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E . Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $L(E)$, alors pour tout $L \in \mathcal{L}(E)$, la suite $(\|L^n\|^{\frac{1}{n}})_{n \geq 0}$ converge et sa limite $\rho(L)$ ne dépend pas de $\|\cdot\|$. C'est le rayon spectral de L , il est égal au plus grand module des valeurs propres (complexes) de L . De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que $\|L\| \leq \rho(L) + \varepsilon$ où $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur associée :*

$$\|L\| = \max_{\|v\|=1} \|L(v)\|.$$

Démonstration. Les normes sur $\mathcal{L}(E)$ étant toutes équivalentes, les quantités

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}}, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}}$$

ne dépendent pas de la norme $\|\cdot\|$.

Commençons par prouver le résultat dans le cas où E est un espace vectoriel sur \mathbf{C} . Choisissons une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ de module maximal et remarquons que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \geq |\lambda|$ si $\|\cdot\|$ est une norme d'opérateur. Pour montrer que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|$ il suffit de trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que $\|L\| \leq |\lambda| + \varepsilon$ pour la norme d'opérateur associée. On sait qu'il existe une base $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans laquelle la matrice de L , notée A , est triangulaire supérieure. Quitte à choisir $\delta > 0$ petit et à remplacer la base $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$ par la base $(\delta^{i-1}v_i)_{1 \leq i \leq p}$, on peut supposer que les coefficients non diagonaux de A ont tous un module inférieur à ε/p . Considérons la norme

$$\|v\| = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|,$$

en notant x_i les coordonnées de v dans la base $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$ et remarquons que $\|L(v)\| \leq (|\lambda| + \varepsilon)\|v\|$.

Pour étudier le cas où E est un espace vectoriel sur \mathbf{R} on considère l'extension

$$L_{\mathbf{C}} : u + iv \mapsto L(u) + iL(v)$$

au complexifié $E_{\mathbf{C}} \sim E + iE$. Chaque norme $\|\cdot\|$ sur $E_{\mathbf{C}}$ induit par restriction une norme sur E et on a $\|u + iv\| \leq \|u\| + \|v\|$. En considérant les normes d'opérateurs associées, on obtient $\|L^n\| \leq \|L_{\mathbf{C}}^n\|$, ce qui implique que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|$. L'inégalité inverse est évidente si on peut choisir $\lambda \in \mathbf{R}$. Sinon, on considère un vecteur propre $w = u + iv$ associé à λ . On a

$$|\lambda|^n \|w\| \leq \|L^n(u)\| + \|L^n(v)\|,$$

ce qui implique que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \geq |\lambda|$. □

Nous aurons également besoin du lemme suivant :

LEMME 3.2.2 : *Pour tous i, j dans $\{1, \dots, p\}$, le nombre de mots admissibles de longueur $n \geq 1$ qui joignent i à j est égale à $A_{i,j}^n$, le coefficient (i, j) de A^n .*

Démonstration. En effet,

$$A_{i,j}^n = \sum_{1 \leq i_1 \leq p, \dots, 1 \leq i_{n-1} \leq p} A_{i,i_1} A_{i_1,i_2} \dots A_{i_{n-1},j}.$$

Remarquons maintenant que $A_{i,i_1} A_{i_1,i_2} \dots A_{i_{n-1},j}$ vaut 1 si $(i, i_1, \dots, i_{n-1}, j)$ est admissible et 0 sinon. \square

PROPOSITION 3.2.3 : *L'application σ_A est positivement transitive si, pour tous i, j dans $\{1, \dots, p\}$, il existe $n \geq 1$ tel que $A_{i,j}^n > 0$. Dans ce cas, on dira que A est irréductible. L'application σ_A est topologiquement mélangeante s'il existe $n \geq 1$ tel que pour tout i, j dans $\{1, \dots, p\}$, on a $A_{i,j}^n > 0$. Dans ce cas, on dira que A est irréductible et apériodique.*

Démonstration. Les cylindres U_i^0 , $i \in \{1, \dots, p\}$, sont non vides. Donc, si σ_A est positivement transitive, alors, pour tous i, j dans $\{1, \dots, p\}$, il existe $n \geq 1$ tel que $U_i^0 \cap \sigma_A^{-n}(U_j^0) \neq \emptyset$. Ceci signifie qu'il existe un mot admissible de longueur n qui joint i à j . Par le lemme précédent, cela signifie également qu'il existe $n \geq 1$ tel que $A_{i,j}^n > 0$.

De même, si σ_A est topologiquement mélangeante, alors, pour tous i, j dans $\{1, \dots, p\}$, on a $U_i^0 \cap \sigma_A^{-n}(U_j^0) \neq \emptyset$ si n est assez grand. Donc, si n est assez grand, alors pour tous i, j dans $\{1, \dots, p\}$, il existe $n \geq 1$ tel que $U_i^0 \cap \sigma_A^{-n}(U_j^0) \neq \emptyset$ et donc $A_{i,j}^n > 0$.

Réciproquement, supposons que pour tous i, j dans $\{1, \dots, p\}$, il existe $n \geq 1$ tel que $A_{i,j}^n \neq 0$. Soient $U_w^{k_0}$ et $U_{w'}^{k'_0}$ deux cylindres admissibles. On veut montrer qu'il existe $k \geq 0$ tel que $U_w^{k_0} \cap \sigma_A^{-k}(U_{w'}^{k'_0}) \neq \emptyset$. Quitte à prendre des cylindres plus petits, on peut supposer que la base commune de $U_w^{k_0}$ et $U_{w'}^{k'_0}$ est $\{-N, \dots, N\}$. Il existe un mot admissible w'' de longueur $n \geq 1$ qui joint la dernière coordonnée de w à la première coordonnée de w' . Ceci implique que le mot $ww''w'$ construit par assemblage est admissible. Ainsi $U_w^{k_0} \cap \sigma_A^{-2N-n}(U_{w'}^{k'_0}) \neq \emptyset$.

Supposons maintenant qu'il existe $n \geq 1$ tel que pour tout i, j dans $\{1, \dots, p\}$, on ait $A_{i,j}^n > 0$. Tout entier plus grand que n vérifie les mêmes hypothèses. Ainsi, l'argument précédent permet d'en déduire que σ_A est topologiquement mélangeant. \square

PROPOSITION 3.2.4 : *L'entropie topologique de σ_A vérifie*

$$h(\sigma_A) = \ln \rho(A).$$

Démonstration. Le recouvrement ouvert \mathcal{U} de X_A formé par les p cylindres $(U_i^0)_{1 \leq i \leq p}$ étant générateur, on sait que $h(\sigma_A) = h(\sigma_A, \mathcal{U})$. Le recouvrement $\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma_A^{-i}(\mathcal{U})$ n'est rien d'autre que le recouvrement par les cylindres admissibles U_w^0 de base $\{0, \dots, n-1\}$. Ils sont bien sûr disjoints deux-à-deux et il y en a exactement

$$N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma_A^{-i}(\mathcal{U}) \right) = \sum_{i,j} A_{i,j}^{n-1}.$$

La formule

$$\|M\| = \sum_{i,j} |M_{i,j}|$$

définit une norme sur l'espace des matrices carrées d'ordre p . Le lemme précédent nous dit que

$$h(\sigma_A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|A^{n-1}\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} \ln \left(\|A^{n-1}\|^{\frac{1}{n-1}} \right) = \ln \rho(A).$$

□

Pour finir, intéressons nous au taux de croissance des orbites périodiques.

LEMME 3.2.5 : *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\#\text{Fix}(\sigma_A^n) = \text{Tr}(A^n).$$

Démonstration. Remarquons que les points fixes de σ_A^n sont naturellement associés aux mots admissibles de longueur n dont les extrémités sont égales. Ainsi, d'après le lemme 3.2.2, on a

$$\#\text{Fix}(\sigma_A^n) = \sum_{1 \leq i \leq p} A_{i,i}^n = \text{Tr}(A^n).$$

□

Nous verrons dans la prochaine section que si A est irréductible et apériodique, alors il possède une valeur propre $\lambda > 1$ et que tout autre valeur propre a un module strictement inférieur à λ . On en déduit que $h(\sigma_A)$ indique le taux de croissance des orbites périodiques. Plus précisément :

PROPOSITION 3.2.6 : *Si A est irréductible et apériodique, alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln (\#\text{Fix}(\sigma_A^n)) = h(\sigma_A) = \ln \rho(A),$$

Démonstration. En effet, on a

$$\#\text{Fix}(\sigma_A^n) = \text{Tr}(A^n) = \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i^n,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A . Ceci implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\text{Fix}(\sigma_A^n)}{\lambda^n} = 1.$$

□

3.3 Théorème de Perron-Frobenius

Rappelons l'énoncé du théorème de Perron-Frobenius.

PROPOSITION 3.3.1 : *Soit A une matrice carrée d'ordre p à coefficients positifs. On suppose qu'il existe $N \geq 1$ tel que les coefficients de A^N sont tous strictement positifs. Alors :*

i) la matrice A a un vecteur propre u à coefficients strictement positifs et tout vecteur propre à coefficients positifs est un multiple de u ;

ii) la valeur propre λ correspond à u est simple et strictement positive et tout autre valeur propre λ' vérifie $|\lambda'| < \lambda$.

Démonstration. Considérons le cône

$$C = \{x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{R}^p \mid x_1 \geq 0, \dots, x_p \geq 0\}.$$

Fixons un hyperplan affine H qui rencontre $\text{Int}(C)$ et dont la partie linéaire ne rencontre C qu'en 0 puis définissons la partie compacte convexe $C_H = C \cap H$. On peut prendre, par exemple,

$$H = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{R}^p \mid x_1 + \dots + x_p = 1\}.$$

Puisque les coefficients de A^N sont strictement positifs, on a $Au \neq 0$ pour tout $u \in C \setminus \{0\}$. Par conséquent A induit une application continue $A_H : C_H \rightarrow C_H$ définie par

$$\mathbf{R}A_H(x) = A(\mathbf{R}x),$$

et les points fixes de A_H correspondent à des vecteurs propres.

Rappelons que le birapport $[a, b, c, d]$ de quatre points sur une droite affine Δ de \mathbf{R}^p est

$$[a, b, c, d] = \frac{(d-a)(c-b)}{(c-a)(d-b)},$$

pour n'importe quel système affine de coordonnées sur Δ . Ce nombre est également invariant par homographie.

On va définir une "distance" d_H sur $\text{Int}(C_H)$. Si x et x' sont deux points distincts de $\text{Int}(C_H)$, on considère la droite Δ_0 passant par x et x' , puis les deux points a et a' de $\Delta_0 \cap \text{Fr}(C_H)$, le point a choisi du côté de x et le point a' du côté de x' . On a donc $[a, a', x, x'] > 1$ et on peut définir $d_H(x, x') = \ln([a, a', x, x'])$. Si on pose $d_H(x, x) = 0$, on obtient une fonction symétrique réflexive et il n'est pas difficile de voir que d_H est continue (on peut également prouver, mais c'est plus difficile, que d_H vérifie l'inégalité triangulaire et définit vraiment une distance).

Le fait que A est à coefficients positifs implique que pour tous x et x' on a

$$d_H(A_H(x), A_H(x')) \leq d_H(x, x').$$

C'est évident si $A_H(x) = A_H(x')$, expliquons pourquoi c'est encore vrai sinon. Notons Δ_1 la droite passant par $A_H(x)$ et $A_H(x')$, puis b et b' les points de $\Delta_1 \cap \text{Fr}(C_H)$, le point b choisi du côté de $A_H(x)$ et le point b' du côté de $A_H(x')$. Remarquons que $A_H(\Delta_0 \cap C_H) \subset \Delta_1 \cap C_H$ et que le point $A_H(a)$ (resp. $A_H(a')$) est situé entre b et $A_H(x)$ (resp. entre b' et $A_H(x')$) et donc que

$$[b, b', A_H(x), A_H(x')] \leq [A_H(a), A_H(a'), A_H(x), A_H(x')]$$

avec égalité si et seulement si $A_H(a) = b$ et $A_H(a') = b'$. Remarquons de plus que A_H induit une homographie entre Δ_0 et Δ_1 et donc que

$$[A_H(a), A_H(a'), A_H(x), A_H(x')] = [a, a', x, x'].$$

Puisque A^N est à coefficients strictement positifs, on sait que $A_H^N(C_H)$ est une partie compacte de $\text{Int}(C_H)$. Les inégalités précédentes sur les birapports impliquent donc que

$$d_H(A_H^N(x), A_H^N(x')) < d_H(x, x'),$$

si $x \neq x'$. En particulier A_H a au plus un point fixe. Pour montrer l'existence d'un tel point, considérons un point u où la fonction $x \mapsto d(x, A_H(x))$ atteint son minimum. Il doit être fixe puisqu'on aurait $d_H(A_H^N(u), A_H^{N+1}(u)) < d_H(u, A_H(u))$ dans le cas contraire, en contradiction avec la propriété d'extremum.

Remarquons maintenant que pour tout voisinage U de u dans C_H , il existe $n \geq 1$ tel que $A_H^n(C_H) \subset U$. En effet, la suite $(A_H^n(C_H))_{n \geq 0}$ étant décroissante, l'ensemble $K = \bigcap_{n \geq 0} A_H^n(C_H)$ est compact et vérifie $A_H(K) = K$. Nous voulons montrer que K se réduit à u . Dans le cas contraire on pourrait trouver $u' \in K$ qui maximise $x \mapsto d_H(x, u)$, mais ce point ne pourrait pas avoir d'antécédent par A_H^N dans K .

(En fait on aurait pu montrer, mais cela aurait demandé plus de travail, non seulement que d_H était une distance mais également que A_H^N était contractante, puis utiliser le théorème de point fixe de Picard.)

Puisque $u = A_N(u)$, ce point est à l'intérieur de C_H , et nous avons montré l'assertion **i)**. Nous voulons maintenant prouver **ii)**. Notons alors λ la valeur propre associée à u . De façon similaire, nous savons que A^t a un unique vecteur propre v à coefficients strictement positifs qui vérifie $\sum_{i=1}^p v_i u_i = 1$. On peut identifier u à un vecteur et v à une forme linéaire qui vérifient $v \circ A = \lambda^* v$ et $v(u) = 1$. En appliquant la première égalité à u , on trouve $\lambda^* = \lambda$. L'hyperplan $\text{Ker}(v)$ est invariant par A et son intersection avec C réduite à 0 . Pour montrer **ii)** il suffit de prouver que $\rho(A|_{\text{Ker}(v)}) < \lambda$. Considérons l'hyperplan affine $H = u + \text{Ker}(v)$ et remarquons que

$$A_H(u + w) = u + \frac{1}{\lambda} A(w).$$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u + w \in C_H$ si $w \in \text{Ker}(v)$ vérifie $\|w\| \leq \varepsilon$. En appliquant ce qui a été dit plus haut au voisinage

$$U = \{u + w, w \in \text{Ker}(v), \|w\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\},$$

on sait qu'il existe $n \geq 1$ tel que $A_H^n(C_H) \subset U$. En particulier pour tout $w \in \text{Ker}(v)$,

$$\|w\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|A^n(w)\| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \lambda^n$$

et donc

$$\rho(A|_{\text{Ker}(v)}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \lambda.$$

□

Remarques

i) Pour tous i, j in $\{1, \dots, p\}$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^n} A_{i,j}^n = u_i v_j.$$

En effet, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^n} A^n u = u$$

ainsi que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^n} A^n w = 0$$

pour tout $w \in \text{Ker}(v)$. On peut remarquer que la matrice $uv^t = (u_i v_j)_{i,j}$ fixe u et annule tout vecteur $w \in \text{Ker}(v)$.

ii) Si les coefficients de A sont formés de 0 et de 1, alors $\lambda > 1$. En effet

$$p\lambda^N > \text{Tr}(A^N) \geq p.$$

iii) Si A est une *matrice stochastique*, c'est-à-dire si $\sum_{j=1}^p A_{i,j} = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, alors $\lambda = 1$. En effet l'hyperplan

$$H = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{R}^p \mid x_1 + \dots + x_p = 1\}$$

est invariant par A^t . Les applications A^t et $(A^t)_H$ coïncident, le point fixe de A_H est un point fixe de A . En fait, pour toute matrice stochastique M , il existe au moins au moins un vecteur $v = (v_1, \dots, v_p)$ à coefficients positifs tels que $\sum_{i=1}^p v_i = 1$ et qui vérifie $vM = v$. En effet l'endomorphisme L dont M^t est la trace dans la base canonique, laisse invariante la partie compacte convexe C_H . Fixons $w \in C$ et définissons

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} L^k(w).$$

Remarquons que

$$\|L(w_n) - w_n\| = \left\| \frac{1}{n} (L^n(w) - w) \right\| \leq \frac{1}{n} \text{diam}(C),$$

ce qui implique que toute valeur d'adhérence v de la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est fixe par L . Le théorème de Perron Frobenius nous dit que ce vecteur est unique dans le cas où il existe une puissance de M dont les coefficients sont strictement positifs.

3.4 Mesures de Markov

Soit $M = (M_{i,j})_{i,j}$ une matrice stochastique et $v = (v_1, \dots, v_p)$ un vecteur à coefficients positifs tel que $\sum_{i=1}^p v_i = 1$ et $vM = v$. Il existe alors une unique mesure borélienne de probabilité μ sur $\{1, \dots, p\}^{\mathbf{Z}}$ telle que pour tout $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in \{1, \dots, p\}^m$ et tout $k_0 \in \mathbf{Z}$, on ait

$$\mu(C_w^{k_0}) = v_{w_0} \left(\prod_{k=0}^{m-2} M_{w_k, w_{k+1}} \right).$$

En effet si on écrit

$$iw = (i, w_0, \dots, w_{m-1}), \quad wi = (w_0, \dots, w_{m-1}, i),$$

pour $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in \{1, \dots, p\}^m$, et $i \in \{1, \dots, p\}$, la formule précédente implique que pour tout $k_0 \in \mathbf{Z}$, on a

$$\sum_{i=1}^p \mu(C_i^{k_0}) = 1$$

et que pour tout $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in \{1, \dots, p\}^{m+1}$ et tout $k_0 \in \mathbf{Z}$, on a

$$\mu(C_w^{k_0}) = \sum_{i=1}^p \mu(C_{iw}^{k_0-1}) = \sum_{i=1}^p \mu(C_{wi}^{k_0})$$

(la première égalité de la ligne précédente est due au fait que $vM = v$, la seconde au fait que M est une matrice stochastique). Le théorème d'extension de Caratheodory nous dit qu'il existe alors une unique mesure borélienne de probabilité μ définie par ces égalités. On a

$$\mu(\sigma^{-1}(C_w^{k_0})) = \mu(C_w^{k_0+1}) = \mu(C_w^{k_0}),$$

ce qui prouve que μ est invariante par σ .

On peut calculer l'entropie métrique d'une mesure de Markov. Rappelons que la partition $\mathcal{C} = (C_i^0)_{1 \leq i \leq r}$, est génératrice et donc que

$$h_\mu(\sigma) = h_\mu(\sigma, \mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{C})\right).$$

Le calcul donne alors

$$\begin{aligned} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{C})\right) &= - \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}} \mu(C_{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}}^0) \ln\left(\mu(C_{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}}^0)\right) \\ &= - \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}} v_{i_0} M_{i_0, i_1} \dots M_{i_{n-2}, i_{n-1}} \ln(v_{i_0} M_{i_0, i_1} \dots M_{i_{n-2}, i_{n-1}}) \\ &= - \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}} v_{i_0} M_{i_0, i_1} \dots M_{i_{n-2}, i_{n-1}} (\ln v_{i_0} + \ln M_{i_0, i_1} + \dots + \ln M_{i_{n-2}, i_{n-1}}) \\ &= - \sum_{i_0} v_{i_0} \ln v_{i_0} - (n-1) \sum_{i, j} v_i M_{i, j} \ln M_{i, j} \end{aligned}$$

et donc

$$h_\mu(\sigma) = - \sum_{i, j} v_i M_{i, j} \ln M_{i, j}.$$

PROPOSITION 3.4.1 : *Soit μ la mesure de Markov définie par une matrice stochastique M et un vecteur fixe v . S'il existe une puissance de M dont les coefficients sont strictement positifs, alors la mesure μ est mélangeante.*

Preuve. Il suffit de prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(C_w^{k_0} \cap \sigma^{-n}(C_{w'}^{k'_0})) = \mu(C_w^{k_0}) \mu(C_{w'}^{k'_0})$$

pour tous cylindres $C_w^{k_0}$ et $C_{w'}^{k'_0}$. Supposons que $w = (w_0, \dots, w_{m-1})$ et $w' = (w'_0, \dots, w'_{m'-1})$. Si $n > m - 1 + k_0 - k'_0$, alors

$$\mu(C_w^{k_0} \cap \sigma^{-n}(C_{w'}^{k'_0})) = v_{w_0} \left(\prod_{k=0}^{m-2} M_{w_k, w_{k+1}} \right) M_{w_{m-1}, w'_0}^{n-m+1-k_0+k'_0} \left(\prod_{k=0}^{m'-1} M_{w'_k, w'_{k+1}} \right),$$

où on écrit $M^n = (M_{i, j}^n)_{i, j}$, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(C_w^{k_0} \cap \sigma^{-n}(C_{w'}^{k'_0})) = v_{w_0} \left(\prod_{k=0}^{m-2} M_{w_k, w_{k+1}} \right) v_{w'_0} \left(\prod_{k=0}^{m'-1} M_{w'_k, w'_{k+1}} \right) = \mu(C_w^{k_0}) \mu(C_{w'}^{k'_0}),$$

car on a vu précédemment que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{i,j}^n = v_j$ □

3.5 Mesure de Parry

Supposons que A est une matrice carrée d'ordre p à coefficients égaux à 0 ou 1 et que

$$A_{i,j} = 0 \Rightarrow M_{i,j} = 0.$$

Le support de la mesure μ est inclus dans X_A car tout cylindre non admissible est de mesure nulle, ainsi μ est une mesure invariante de σ_A .

S'il existe $N \geq 1$ tel que les coefficients de A^N sont strictement positifs, c'est-à-dire si A est irréductible et apériodique, il existe alors une valeur propre réelle $\lambda = \rho(A) > 1$ plus grande strictement que le module de tout autre valeur propre. Dans ce cas, il existe une mesure de Markov particulière appelée *mesure de Parry*. Soient u un vecteur propre à coefficients positifs (et donc associé à λ) et v un vecteur propre de A^t à coefficients positifs (donc associé également à λ) tels que $\sum_{i=1}^p v_i u_i = 1$. Considérons la matrice M , où

$$M_{i,j} = \frac{A_{i,j} u_j}{\lambda u_i}.$$

C'est une matrice stochastique car

$$\sum_{j=1}^p A_{i,j} u_j = \lambda u_i,$$

la mesure de Markov associée est la mesure de Parry μ_A , elle est supportée sur X_A . Le vecteur propre de M^t qui est dans $C \cap H$ est $(v_1 u_1, \dots, v_p u_p)$. Par exemple si $A_{i,j} = 1$ pour tout (i, j) , alors $\lambda = p$ et $u_i = v_i = \frac{1}{\sqrt{p}}$. Dans ce cas la mesure de Parry est la mesure équilibrée.

La mesure de Parry maximise l'entropie :

PROPOSITION 3.5.1 : *On a*

$$h_{\mu_A}(\sigma_A) = h(\sigma_A) = \ln \rho(A).$$

Démonstration. Rappelons que l'entropie métrique de μ_A vaut

$$\begin{aligned} h_{\mu_A}(\sigma_A) &= - \sum_{i,j} (u_i v_i) M_{i,j} \ln(M_{i,j}) \\ &= - \sum_{i,j} (u_i v_i) \frac{A_{i,j} u_j}{\lambda u_i} \ln \left(\frac{A_{i,j} u_j}{\lambda u_i} \right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{A_{i,j} v_i u_j}{\lambda} (-\ln(A_{i,j} u_j) + \ln u_i + \ln \lambda). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j} \frac{A_{i,j} v_i u_j}{\lambda} \ln(A_{i,j} u_j) &= - \sum_{i,j} \frac{A_{i,j} v_i u_j}{\lambda} \ln(u_j) = - \sum_j v_j u_j \ln u_j, \\ \sum_{i,j} \frac{A_{i,j} v_i u_j}{\lambda} \ln u_i &= \sum_i v_i u_i \ln u_i \end{aligned}$$

et

$$\sum_{i,j} \frac{A_{i,j} v_i u_j}{\lambda} \ln \lambda = \ln \lambda \sum_i v_i u_i = \ln \lambda.$$

□

En fait, c'est la seule mesure qui maximise l'entropie.

PROPOSITION 3.5.2 : *La mesure de Parry μ_A est la seule mesure $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma_A}$ telle que $h_\mu(\sigma_A) = h(\sigma_A)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma_A}$ telle que $h_\mu(\sigma_A) = h(\sigma_A)$ et $\mu \neq \mu_A$. Cette mesure n'est pas uniformément continue par rapport à μ_A . Sinon, on pourrait écrire $d\mu = f d\mu_A$, où $f \in L_1(\mu_A)$ est invariante par T . Mais μ_A étant ergodique, f devrait être constante égale à 1. Puisque μ n'est pas uniformément continue par rapport à μ_A , il existe une partie borélienne B telle que $\mu_A(B) = 0$ et $\mu(B) > 0$. De la même façon qu'on a montré que μ_A et μ étaient régulières, on peut construire une suite $(B_l)_{l \geq 0}$ formée de réunions finies de cylindres, telle que

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \mu(B_l) = \mu(B) \text{ et } \lim_{l \rightarrow +\infty} \mu_A(B_l) = \mu_A(B) = 0.$$

La partition $\mathcal{P} = (C_i^0)_{1 \leq i \leq p}$ étant génératrice, on sait que

$$h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{2n-2} T^{-i}(\mathcal{P}) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} H_\mu \left(\bigvee_{i=-n+1}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{P}) \right).$$

Remarquons que pour tout cylindre admissible $C_w^{k_0}$ associé à un mot de longueur n , on a

$$\mu_A(C_w^{k_0}) = \left(\prod_{k=0}^{m-1} A_{i_k, i_{k+1}} \right) v_{i_0} u_{i_m} \lambda^{-m} \geq C \lambda^{-m}$$

où $C = \inf_{i,j} v_i u_j > 0$.

LEMME 3.5.3 : *Pour toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ de nombre positifs*

$$\sum_{i=1}^p x_i = a \Rightarrow - \sum_{i=1}^p x_i \ln x_i \leq a \ln \left(\frac{p}{a} \right).$$

Démonstration. La fonction $\phi : t \mapsto -t \ln t$ étant concave sur $]0, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \phi(x_i) \leq - \left(\frac{\sum_{i=1}^p x_i}{p} \right) \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^p x_i}{p} \right) = \frac{a}{p} \ln \left(\frac{p}{a} \right).$$

□

Fixons l et choisissons n assez grand pour que B_l soit réunion d'éléments de $\mathcal{P}_n = \bigvee_{i=-n+1}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{P})$.

On peut écrire

$$\begin{aligned}
H_\mu(\mathcal{P}_n) &= \sum_{P \in \mathcal{P}_n, P \subset B_l} \phi(\mu(P)) + \sum_{P \in \mathcal{P}_n, P \not\subset B_l} \phi(\mu(P)) \\
&\leq \mu(B_l) \ln \left(\frac{\#\{P \in \mathcal{P}_n, P \subset B_l\}}{\mu(B_l)} \right) + (1 - \mu(B_l)) \ln \left(\frac{\#\{P \in \mathcal{P}_n, P \not\subset B_l\}}{1 - \mu(B_l)} \right) \\
&\leq \mu(B_l) \ln \left(\frac{\lambda^{2n-1} \mu_A(B_l)}{C \mu(B_l)} \right) + (1 - \mu(B_l)) \ln \left(\frac{\lambda^{2n-1} (1 - \mu_A(B_l))}{C (1 - \mu(B_l))} \right) \\
&= \mu(B_l) \ln \left(\frac{\mu_A(B_l)}{\mu(B_l)} \right) + (1 - \mu(B_l)) \ln \left(\frac{1 - \mu_A(B_l)}{1 - \mu(B_l)} \right) + (2n - 1) \ln \lambda - \ln C
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que cette quantité est inférieure à $2n \ln \lambda$ si l est assez grand. On a une contradiction puisque

$$h_\mu(T) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{2n-2} T^{-i}(\mathcal{P}) \right) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1} H_\mu \left(\bigvee_{i=-n+1}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{P}) \right).$$

□

Le résultat qui suit nous dit que la mesure de Parry μ_A est la limite, pour la topologie faible*, des mesures équilibrées sur les orbites périodiques.

PROPOSITION 3.5.4 : On a $\mu_A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n$, où $\mu_n = \frac{1}{\#\text{Fix}(\sigma_A^n)} \sum_{i \in \text{Fix}(\sigma_A^n)} \delta_i$.

Démonstration. On doit prouver que pour tout cylindre $C_w^{k_0}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(C_w^{k_0}) = \mu_A(C_w^{k_0}).$$

Écrivons $P_n = \text{Fix}(\sigma_A^n)$ et rappelons que $\#P_n = \text{Tr}(A^n)$. Fixons $w = (i_0, \dots, i_m) \in \{1, \dots, p\}^{m+1}$. Pour tout $n > m$, on a

$$\begin{aligned}
\mu_n(C_w^{k_0}) &= \frac{\#\{P_n \cap C_w^{k_0}\}}{\text{Tr}(A^n)} \\
&= \frac{1}{\text{Tr}(A^n)} \left(\prod_{k=0}^{m-1} A_{i_k, i_{k+1}} \right) A_{i_m, i_0}^{n-m}.
\end{aligned}$$

On a vu que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^n} \text{Tr}(A^n) = 1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^n} A_{i_m, i_0}^n = u_{i_m} v_{i_0}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(C_w^{k_0}) &= \left(\prod_{k=0}^{m-1} A_{i_k, i_{k+1}} \right) \frac{u_{i_m} v_{i_0}}{\lambda^m} \\
&= \left(\prod_{k=0}^{m-1} M_{i_k, i_{k+1}} \right) v_{i_0} u_{i_0} = \mu_A(C_w^{k_0}).
\end{aligned}$$

□

4.1 Endomorphismes hyperboliques.

Définition: Soit $(E, \|\cdot\|_0)$ un espace de Banach. Un endomorphisme $u : E \rightarrow E$ est *hyperbolique* s'il existe une décomposition $E = E^s \oplus E^u$ en sous-espaces fermés, une norme $\|\cdot\|$ équivalente à $\|\cdot\|_0$ et un réel $\lambda \in (0, 1)$ tels que :

- i) $u|_{E^s}$ est un endomorphisme de E^s (i.e. $u(E^s) \subset E^s$);
- ii) $u|_{E^u}$ est un automorphisme de E^u (en particulier $u(E^u) = E^u$);
- iii) $\|u|_{E^s}\| \leq \lambda$ et $\|(u|_{E^u})^{-1}\| \leq \lambda$;
- iv) pour tout $x \in E$, on a $\|x\| = \max(\|x^s\|, \|x^u\|)$, où $x = x^s + x^u$ est la décomposition de x dans $E^s \oplus E^u$.

On dit que $E = E^s \oplus E^u$ est une *décomposition hyperbolique*, que $\|\cdot\|$ est une *norme adaptée* et que u est λ -*hyperbolique*.

Le résultat qui suit nous dit que la décomposition est unique :

PROPOSITION 4.1.1 : *Si $u : E \rightarrow E$ est hyperbolique, les sous-espaces E^s et E^u sont caractérisés comme suit :*

- l'espace E^s est l'ensemble des points $x \in E$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(x) = 0$;
- l'espace E^u est l'ensemble des points x tels qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ et $u^n(x_n) = x$.

Démonstration. Soit $\|\cdot\|$ une norme adaptée. Alors, pour tout $x = x^s + x^u \in E = E^s \oplus E^u$, on a $u^n(x) = u^n(x^s) + u^n(x^u)$, où $\|u^n(x^s)\| \leq \lambda^n \|x^s\|$ et $\|u^n(x^u)\| \geq \lambda^{-n} \|x^u\|$. Ceci implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u^n(x)\| = \begin{cases} 0 & \text{si } x_u = 0, \\ +\infty & \text{si } x_u \neq 0; \end{cases}$$

en d'autres termes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u^n(x)\| = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E_s, \\ +\infty & \text{si } x \notin E_s. \end{cases}$$

Ces conditions caractérisent E_s car elles ne dépendent pas de la norme mais de sa classe d'équivalence..

Remarquons maintenant que pour tout $x \in E^u$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, où $x_n = ((u|_{E^u})^{-1})^n(x)$. Réciproquement, soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ et $u^n(x_n) = x$. Si on écrit $x_n = x_n^s + x_n^u$ et $x = x^s + x^u$, on a $u^n(x_n^s) = x^s$ et $u^n(x_n^u) = x^u$. La norme adaptée $\|\cdot\|$ étant équivalente à la norme initiale, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^s = 0$, ce que implique que $x^s = 0$ car $\|x^s\| \leq \lambda^n \|x_n^s\|$.

Dans le cas où u est un automorphisme, u^{-1} est lui-même hyperbolique et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u^{-n}(x)\| = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E_u, \\ +\infty & \text{si } x \notin E_u. \end{cases}$$

Remarque : Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E est hyperbolique si et seulement si les valeurs propres de u ont un module différent de 1. En effet, dans le cas

où u est λ -hyperbolique et où $E = E^s \oplus E^u$ est la décomposition hyperbolique, toute valeur propre de u est soit une valeur propre de $u|_{E^s}$ (et donc de module $\leq \lambda$) soit une valeur propre de $u|_{E^u}$ (et donc de module $\geq \lambda^{-1}$). Réciproquement, si les valeurs propres de u ont un module différent de 1, on peut trouver une décomposition $E = E^s \oplus E^u$ en sous-espaces invariants tels que les valeurs propres de $u|_{E^s}$ ont un module < 1 et les valeurs propres de $u|_{E^u}$ un module > 1 . Choisissons $\lambda \in]0, 1[$ tel que les valeurs propres de u n'appartiennent pas à $[\lambda, \lambda^{-1}]$. Les rayons spectraux de $u|_{E^s}$ et $(u|_{E^u})^{-1}$ étant strictement inférieurs à λ , on peut trouver une norme $\| \cdot \|_s$ sur E^s et une norme $\| \cdot \|_u$ sur E^u tels que les normes d'opérateurs de $u|_{E^s}$ de $(u|_{E^u})^{-1}$ sont inférieurs à λ . On obtient une norme adaptée en posant $\|x\| = \max(\|x^s\|_s, \|x^u\|_u)$.

Dans le cas plus général où E est un espace de Banach, on considère le complexifié $E_{\mathbf{C}}$ et le spectre $\text{sp}(u)$ de u , formé des nombres complexes λ tels que $u_{\mathbf{C}} - \lambda \text{Id}_{E_{\mathbf{C}}}$ n'est pas un automorphisme. Cet ensemble est compact. Dire que u est hyperbolique signifie que le spectre ne contient pas de nombre complexe de module 1.

4.2 Automorphismes hyperboliques de \mathbf{T}^r .

Fixons une norme $\| \cdot \|$ sur \mathbf{R}^r et considérons la distance associée d sur $\mathbf{T}^r = \mathbf{R}^r / \mathbf{T}^r$. C'est-à-dire, posons

$$d(\widehat{x}, \widehat{y}) = \inf_{\pi(x)=\widehat{x}, \pi(y)=\widehat{y}} \|x - y\|,$$

où

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{R}^r &\rightarrow \mathbf{T}^r, \\ x &\mapsto x + \mathbf{Z}^r \end{aligned}$$

est la projection. Rappelons qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $\widehat{x} \in \mathbf{T}^r$, on a

$$\pi^{-1}(B(\widehat{x}, \varepsilon)) = \bigsqcup_{\pi(x)=\widehat{x}} B(x, \varepsilon)$$

et tel que chaque application $\pi|_{B(x, \varepsilon)}$ est une isométrie de $B(x, \varepsilon)$ sur $B(\widehat{x}, \varepsilon)$.

Soit A un automorphisme hyperbolique de \mathbf{R}^r dont la matrice dans la base canonique est à coefficients entiers et tel que $\det(A) = \pm 1$. On note \widehat{A} l'automorphisme de \mathbf{T}^r relevé par A et $\mathbf{R}^r = E^s \oplus E^u$ la décomposition hyperbolique de A .

PROPOSITION 4.2.1 : *Pour tout $\widehat{x} \in \mathbf{T}^r$ les ensembles*

$$W^s(\widehat{x}) = \{\widehat{y} \in \mathbf{T}^r \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} d(\widehat{A}^k(\widehat{y}), \widehat{A}^k(\widehat{x})) = 0\}$$

et

$$W^u(\widehat{x}) = \{\widehat{y} \in \mathbf{T}^r \mid \lim_{k \rightarrow -\infty} d(\widehat{A}^k(\widehat{y}), \widehat{A}^k(\widehat{x})) = 0\}$$

sont les projections dans \mathbf{T}^r des espaces affines $x + E^s$ et $x + E^u$, où $x \in \pi^{-1}(\{\widehat{x}\})$.

Démonstration. Pour tout $y \in x + E^s$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n(y) - A^n(x)\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n(y - x)\| = 0,$$

ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\widehat{A}^n(\widehat{y}), \widehat{A}^n(\widehat{x})) = 0,$$

car $d(\hat{x}', \hat{y}') \leq \|x' - y'\|$, pour tout x' et y' dans \mathbf{R}^r . Ainsi, on a $\pi(x + E^s) \subset W^s(\hat{x})$.

Fixons $\delta \in (0, \varepsilon)$ tel que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|A(x) - A(y)\| < \varepsilon,$$

pour tout x et y dans \mathbf{R}^r . Pour tout $\hat{y} \in W^s(\hat{x})$, il existe $N \geq 0$ tel que $d(\hat{A}^n(\hat{y}), \hat{A}^n(\hat{x})) < \delta$ pour $n \geq N$. Par définition de ε , pour tout $n \geq N$, il existe un unique $k_n \in \mathbf{Z}^r$ tel que $\|A^n(y + k_n) - A^n(x)\| < \varepsilon$ et on a $\|A^n(y + k_n) - A^n(x)\| = d(\hat{A}^n(\hat{y}), \hat{A}^n(\hat{x})) < \delta$. Observons que $\|A^{n+1}(y + k_n) - A^{n+1}(x)\| < \varepsilon$. Ceci implique que $k_{n+1} = k_n$. Ainsi le point $y + k_N$ appartient à $x + E^s$, ce qui implique que $\hat{y} \in \pi(x + E^s)$. La preuve est similaire pour $W^u(\hat{x})$. \square

Exemple Supposons que la matrice de A dans la base canonique de \mathbf{R}^2 soit

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, l'équation de la droite E^s est $x_2 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}x_1$, celle de la droite E^u est $x_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x_1$. Les pentes étant irrationnelles, les droites $x + E^s$ et $x + E^u$ se projettent chacune en une partie dense de \mathbf{T}^2 .

PROPOSITION 4.2.2 : *Pour tout \hat{x} et \hat{y} dans \mathbf{T}^r , les ensembles $W^s(\hat{x})$ et $W^u(\hat{y})$ ont une intersection non vide.*

Démonstration. Les espaces affines $x + E^s$ et $y + E^u$ ont une intersection non vide. \square

On peut déduire deux corollaires du résultat précédent (le second pouvant également se déduire d'arguments de théorie ergodique).

COROLLAIRE 4.2.3 : *Pour tout $\hat{x} \in \mathbf{T}^r$, les ensembles $W^s(\hat{x})$ et $W^u(\hat{x})$ sont denses.*

Démonstration. Les ensembles $W^s(\hat{x})$ et $W^u(\hat{x})$ se déduisant de $W^s(0)$ et $W^u(0)$ par translation, il suffit de prouver que $W^s(0)$ et $W^u(0)$ sont denses. On va montrer que leur adhérence contient l'ensemble des points périodiques qui, on le sait est dense (c'est $\mathbf{Q}^2/\mathbf{Z}^2$). Puisque 0 est fixe, les ensembles $W^s(0)$ et $W^u(0)$ sont invariants. Si \hat{x} est un point périodique de \hat{A} de période q , on peut choisir $\hat{y} \in W^u(0) \cap W^s(\hat{x})$. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{A}^{nq}(\hat{y}) = \hat{x}$ et donc que $\hat{x} \in \overline{W^u(0)}$. On démontre de la même façon que $\hat{x} \in \overline{W^s(0)}$. \square

On sait que \hat{A} préserve la mesure de Haar et que la mesure de Haar est mélangeante, puisque les valeurs propres de A ne sont pas racines de l'unité. La mesure de Haar est donc ergodique, et on en déduit que \hat{A} est transitif. Donnons une preuve de ce dernier résultat qui ne fait pas appel à la théorie ergodique.

COROLLAIRE 4.2.4 : *L'automorphisme \hat{A} est positivement transitif.*

Démonstration. Soit U et V deux parties ouvertes non vides. Choisissons un point périodique $\hat{x} \in U$ et notons q sa période, de même choisissons un point périodique $\hat{x}' \in U'$ et notons q' sa période. On peut trouver $\hat{y} \in W^u(\hat{x}) \cap W^s(\hat{x}')$ et on sait que $\lim_{k \rightarrow -\infty} \hat{A}^{kq}(\hat{y}) = \hat{x}$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{A}^{kq'}(\hat{y}) = \hat{x}'$. On en déduit qu'il existe $n \geq 0$ et $n' \geq 0$ tels que $\hat{A}^{-n}(\hat{y}) \in U$ et $\hat{A}^{n'}(\hat{y}) \in V$. Ainsi, on a $U \cap \hat{A}^{-n-n'}(V) \neq \emptyset$. \square

4.3 Perturbation des endomorphismes hyperboliques.

Commençons par la version paramétrée du théorème de point fixe de Picard.

THÉORÈME 4.3.1 : *Soit (X, d) et (Y, d) deux espaces métriques, Y étant complet. Soit $\Phi : X \times Y \rightarrow Y$ une application continue vérifiant la propriété suivante : il existe $\lambda \in (0, 1)$ tel que pour tout x dans X et pour tous y, y' dans Y , on a*

$$d(\Phi(x, y), \Phi(x, y')) \leq \lambda d(y, y').$$

Alors, pour tout $x \in X$, il existe une unique solution $y = \theta(x)$ de l'équation $\Phi(x, y) = y$ et la fonction $\theta : X \rightarrow Y$ est continue.

Proof. L'existence d'une unique solution $y = \theta(x)$ de l'équation $\Phi(x, y) = y$ est une conséquence du théorème du point fixe. Pour montrer que θ est continue, considérons x et x' dans X et observons que

$$\begin{aligned} d(\theta(x), \theta(x')) &= d(\Phi(x, \theta(x)), \Phi(x', \theta(x'))) \\ &\leq d(\Phi(x, \theta(x)), \Phi(x', \theta(x))) + d(\Phi(x', \theta(x)), \Phi(x', \theta(x'))) \\ &\leq d(\Phi(x, \theta(x)), \Phi(x', \theta(x))) + \lambda d(\theta(x), \theta(x')), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$d(\theta(x), \theta(x')) \leq \frac{1}{1 - \lambda} d(\Phi(x, \theta(x)), \Phi(x', \theta(x))).$$

Fixons $x \in X$. L'application Φ étant continue en $(x, \theta(x))$, on en déduit que

$$\lim_{x' \rightarrow x} d(\theta(x), \theta(x')) = 0.$$

□

On en déduit le résultat important suivant :

PROPOSITION 4.3.2 : *Soit $T : E \rightarrow E$ un endomorphisme λ -hyperbolique d'un espace de Banach E . Écrivons $E = E^s \oplus E^u$ pour la décomposition hyperbolique et considérons une norme adaptée $\|\cdot\|$. Si $\varphi : E \rightarrow E$ est une application lipschitzienne de rapport $\varepsilon < \varepsilon_0 = 1 - \lambda$, alors $f = T + \varphi$ a un unique point fixe $x \in E$, et on a*

$$\|x\| < \frac{\|\varphi(0)\|}{\varepsilon_0 - \varepsilon}.$$

Démonstration.. Identifions E et $E^s \times E^u$ et écrivons

$$\begin{aligned} T(x^s, x^u) &= (T^s(x^s), T^u(x^u)), \\ \varphi(x^s, x^u) &= (\varphi^s(x^s, x^u), \varphi^u(x^s, x^u)), \\ f(x^s, x^u) &= (f^s(x^s, x^u), f^u(x^s, x^u)). \end{aligned}$$

Définissons maintenant

$$\bar{f} : (x^s, x^u) \mapsto (f^s(x^s, x^u), x^u + (T^u)^{-1}(x^u - f^u(x^s, x^u))).$$

Remarquons que $f = (f^s, f^u)$ et $\bar{f} = (f^s, \bar{f}^u)$ ont les mêmes points fixes. Remarquons également que \bar{f} est lipschitzienne de rapport $(\varepsilon + \lambda)$. En effet,

$$\begin{aligned} \|f^s(x^s, x^u) - f^s(y^s, y^u)\| &\leq \|\varphi^s(x^s, x^u) - \varphi^s(y^s, y^u)\| + \|T^s(x^s) - T^s(y^s)\| \\ &\leq (\varepsilon + \lambda)\|(x^s, x^u) - (y^s, y^u)\|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\bar{f}^u(x^s, x^u) - \bar{f}^u(y^s, y^u)\| &= \|x^u - y^u + (T^u)^{-1}(x^u - y^u - f^u(x^s, x^u) + f^u(y^s, y^u))\| \\ &= \|(T^u)^{-1}(T^u(x^u) - T^u(y^u) - f^u(x^s, x^u) + f^u(y^s, y^u) + x^u - y^u)\| \\ &= \|(T^u)^{-1}(\varphi^u(y^s, y^u) - \varphi^u(x^s, x^u) + x^u - y^u)\| \\ &\leq \lambda(\varepsilon\|(x^s, x^u) - (y^s, y^u)\| + \|x^u - y^u\|) \\ &\leq \lambda(\varepsilon + 1)\|(x^s, x^u) - (y^s, y^u)\| \\ &\leq (\varepsilon + \lambda)\|(x^s, x^u) - (y^s, y^u)\|. \end{aligned}$$

Cela implique que \bar{f} a un unique point fixe x . Remarquons également que

$$\|x\| - \|\bar{f}(0)\| \leq \|x - \bar{f}(0)\| = \|\bar{f}(x) - \bar{f}(0)\| \leq (\varepsilon + \lambda)\|x - 0\| = (\varepsilon + \lambda)\|x\|,$$

et donc que

$$\|x\| \leq \frac{1}{1 - \lambda - \varepsilon} \|\bar{f}(0)\| = \frac{1}{\varepsilon_0 - \varepsilon} \|\bar{f}(0)\| \leq \frac{1}{\varepsilon_0 - \varepsilon} \|\varphi(0)\|.$$

□

On va en déduire un résultat fondamental sur les endomorphismes hyperboliques.

Définition. Soit $F : X \rightarrow X$ une application continue sur un espace métrique (X, d) et $\alpha > 0$. On dit qu'une suite $(x_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ est une α -pseudo-orbite si $d(f(x_i), x_{i+1}) < \alpha$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

PROPOSITION 4.3.3 (LEMME DE POURSUITE) : Soit $T : E \rightarrow E$ un endomorphisme λ -hyperbolique sur un espace de Banach E , où $E = E^s \oplus E^u$ est la décomposition hyperbolique et $\|\cdot\|$ une norme adaptée. Soit $\varphi : E \rightarrow E$ une application lipschitzienne de rapport $\varepsilon < \varepsilon_0 = 1 - \lambda$. Posons $f = T + \varphi$. Pour toute α -pseudo-orbite $(x_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ de f , il existe une unique orbite $(y_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ de f telle que

$$\sup_{i \in \mathbf{Z}} \|y_i - x_i\| < +\infty,$$

et on a

$$\sup_{i \in \mathbf{Z}} \|y_i - x_i\| \leq \frac{\alpha}{\varepsilon_0 - \varepsilon}.$$

Démonstration. Notons \mathcal{E} l'espace des suites $z = (z_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ bornées de E , muni de la norme

$$\|z\| = \sup_{i \in \mathbf{Z}} \|z_i\|.$$

C'est un espace de Banach qui se décompose sous la forme $\mathcal{E} = \mathcal{E}^s + \mathcal{E}^u$, où \mathcal{E}^s (resp. \mathcal{E}^u) est l'espace des suites bornées de E^s (resp. E^u). Remarquons que

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ (z_i)_{i \in \mathbf{Z}} &\mapsto (T(z_{i-1}))_{i \in \mathbf{Z}} \end{aligned}$$

est λ -hyperbolique avec une décomposition hyperbolique $\mathcal{E} = \mathcal{E}^s + \mathcal{E}^u$. Remarquons que la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ (z_i)_{i \in \mathbf{Z}} &\mapsto (\varphi(x_{i-1} + z_{i-1}) + T(x_{i-1}) - x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \end{aligned}$$

est bien définie car la suite

$$(\varphi(x_{i-1} + z_{i-1}) + T(x_{i-1}) - x_i)_{i \in \mathbf{Z}} = (\varphi(x_{i-1} + z_{i-1}) - \varphi(x_{i-1}) + f(x_{i-1}) - x_i)_{i \in \mathbf{Z}}$$

est bornée, et qu'elle est lipschitzienne de rapport ε . On en déduit que $\mathcal{T} + \mathcal{F}$ a un unique point fixe $z = (z_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ et que

$$\|z\| \leq \frac{\|\mathcal{F}(0)\|}{\varepsilon_0 - \varepsilon} \leq \frac{\alpha}{\varepsilon_0 - \varepsilon}.$$

Posons $y_i = z_i + x_i$. On déduit de l'équation

$$z_i = \varphi(x_{i-1} + z_{i-1}) + T(x_{i-1}) - x_i + T(z_{i-1}),$$

que $(y_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ est une orbite de f vérifiant

$$\sup_{i \in \mathbf{Z}} \|y_i - x_i\| \leq \frac{\alpha}{\varepsilon_0 - \varepsilon}.$$

L'unicité de $(z_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ nous dit que c'est la seule orbite telle que

$$\sup_{i \in \mathbf{Z}} \|y_i - x_i\| < +\infty.$$

□

4.4 Perturbation des automorphismes hyperboliques, résultats de conjugaison.

Dans le cas d'un automorphisme, on peut être plus précis et obtenir le résultat de conjugaison suivant :

PROPOSITION 4.4.1 : *Soit $T : E \rightarrow E$ un automorphisme λ -hyperbolique d'un espace de Banach. Écrivons $E = E^s \oplus E^u$ pour la décomposition hyperbolique et considérons une norme adaptée $\|\cdot\|$. Si $\varphi : E \rightarrow E$ est une application bornée et lipschitzienne de rapport $\varepsilon < \varepsilon_1 = \min(\|T^{-1}\|^{-1}, 1 - \lambda)$, alors il existe un unique homéomorphisme h de E tel que $h - \text{Id}_E$ soit borné et vérifie $h \circ T \circ h^{-1} = T + \varphi$.*

Démonstration. La proposition se déduira des trois lemmes suivants

LEMME 4.4.2 : *L'application $f = T + \varphi$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Remarquons que

$$f(x) = y \Leftrightarrow T(x) + \varphi(x) = y \Leftrightarrow x = T^{-1}(y) - T^{-1} \circ \varphi(x).$$

La fonction

$$\Phi : (x, y) \mapsto T^{-1}(y) - T^{-1} \circ \varphi(x)$$

est continue et chaque application partielle $x \mapsto \Phi(x, y)$ est lipschitzienne de rapport $\|T^{-1}\|_\varepsilon$. Par hypothèse, on a $\|T^{-1}\|_\varepsilon < 1$, et on peut donc appliquer la version paramétrée du théorème de point fixe. Il existe une fonction continue $\theta : E \rightarrow E$ telle que

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \theta(y).$$

Ceci signifie que f est un homéomorphisme. \square

LEMME 4.4.3 : *Si φ et ψ sont deux applications bornées et lipschitziennes de rapport $\varepsilon < \varepsilon_1$, il existe une unique application continue bornée $\beta : E \rightarrow E$ telle que*

$$(T + \varphi) \circ (\text{Id}_E + \beta) = (\text{Id}_E + \beta) \circ (T + \psi).$$

Démonstration. L'application $g = T + \psi$ étant un homéomorphisme, l'équation

$$(T + \varphi) \circ (\text{Id}_E + \beta) = (\text{Id}_E + \beta) \circ (T + \psi)$$

peut s'écrire

$$(T + \varphi) \circ (\text{Id}_E + \beta) \circ g^{-1} = \text{Id}_E + \beta,$$

ou encore

$$T \circ \beta \circ g^{-1} + \varphi \circ (\text{Id}_E + \beta) \circ g^{-1} + T \circ g^{-1} - \text{Id}_E = \beta.$$

Notons $\mathcal{E} = C(E, E)$ l'espace des fonctions continues bornées $\beta : E \rightarrow E$ muni de la norme $\|\cdot\|$, où $\|\beta\| = \sup_{x \in E} \|\beta(x)\|$, puis définissons deux applications $\mathcal{T} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ et $\mathcal{F} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\beta) &= T \circ \beta \circ g^{-1} \\ \mathcal{F}(\beta) &= \varphi \circ (\text{Id}_E + \beta) \circ g^{-1} + T \circ g^{-1} - \text{Id}_E \\ &= \varphi \circ (\text{Id}_E + \beta) \circ g^{-1} - \psi \circ g^{-1} \end{aligned}$$

Remarquons que \mathcal{T} est λ -hyperbolique avec une décomposition hyperbolique $\mathcal{E} = \mathcal{E}^s \oplus \mathcal{E}^u$, où $\mathcal{E}^s = C(E, E^s)$ et $\mathcal{E}^u = C(E, E^u)$, et que \mathcal{F} est lipschitzienne de rapport ε . Par hypothèse, on a $\varepsilon < \varepsilon_1 \leq 1 - \lambda$. Ceci implique que $\mathcal{T} + \mathcal{F}$ a un unique point fixe. \square

LEMME 4.4.4 : *Sous les hypothèses du lemme 4.4.3, l'application $h = \text{Id}_E + \beta$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Rappelons que $f = T + \varphi$ et $g = T + \psi$. Le lemme précédent nous dit qu'il existe β et β' dans \mathcal{E} tels que

$$f \circ (\text{Id}_E + \beta) = (\text{Id}_E + \beta) \circ g$$

et

$$(\text{Id}_E + \beta') \circ f = g \circ (\text{Id}_E + \beta').$$

Ainsi, on a

$$f \circ (\text{Id}_E + \beta) \circ (\text{Id}_E + \beta') = (\text{Id}_E + \beta) \circ (\text{Id}_E + \beta') \circ f$$

et

$$g \circ (\text{Id}_E + \beta') \circ (\text{Id}_E + \beta) = (\text{Id}_E + \beta') \circ (\text{Id}_E + \beta) \circ g.$$

L'application

$$(\text{Id}_E + \beta) \circ (\text{Id}_E + \beta') - \text{Id}_E = \beta' + \beta \circ (\text{Id}_E + \beta')$$

étant bornée et continue, le lemme 4.4.3 appliqué au couple (f, f) nous dit que

$$(\text{Id}_E + \beta) \circ (\text{Id}_E + \beta') = \text{Id}_E.$$

De façon analogue, on a

$$(\text{Id}_E + \beta') \circ (\text{Id}_E + \beta) = \text{Id}_E.$$

Ainsi $\text{Id}_E + \beta$ est un homéomorphisme et on a $(\text{Id}_E + \beta)^{-1} = \text{Id}_E + \beta'$. \square

4.5 Applications aux homéomorphismes de \mathbf{T}^r .

Rappelons que toute application continue $F : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$ est homotope à un unique endomorphisme linéaire $\widehat{F}_* : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$ dont on notera F_* le relèvement linéaire.

PROPOSITION 4.5.1 : *Soit $F : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$ un homéomorphisme tel que F_* est un automorphisme hyperbolique de \mathbf{R}^r . Alors \widehat{F}_* est un facteur F . Plus précisément, il existe une unique application continue $H : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$ homotope à l'identité telle que $H \circ F = \widehat{F}_* \circ H$.*

Démonstration. Considérons la décomposition hyperbolique $\mathbf{R}^r = E^s \oplus E^u$ de F_* . Fixons un relèvement $f : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$ de F . On veut trouver une application continue $\beta : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$ invariante par les translations entières telle que

$$(\text{Id}_{\mathbf{R}^r} + \beta) \circ f = F_* \circ (\text{Id}_{\mathbf{R}^r} + \beta).$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$\beta = F_* \circ f^{-1} + F_* \circ \beta \circ f^{-1} - \text{Id}_{\mathbf{R}^r}.$$

Notons \mathcal{E} l'espace des fonctions $\beta : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$ invariante par les translations entières. Remarquons que

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ \beta &\mapsto F_* \circ \beta \circ f^{-1} \end{aligned}$$

est hyperbolique avec une décomposition $\mathcal{E} = \mathcal{E}^s \oplus \mathcal{E}^u$, où \mathcal{E}^s (resp. \mathcal{E}^u) est l'espace des fonctions $\beta : \mathbf{R}^r \rightarrow E^s$ (resp. $\beta : \mathbf{R}^r \rightarrow E^u$) invariante par les translations entières. Puisque la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ \beta &\mapsto F_* \circ f^{-1} - \text{Id}_{\mathbf{R}^r} \end{aligned}$$

est constante, on déduit de la proposition 4.3.2 qu'il existe une unique application $\beta \in \mathcal{E}$ telle que

$$\beta = F_* \circ f^{-1} + F_* \circ \beta \circ f^{-1} - \text{Id}_{\mathbf{R}^r},$$

c'est-à-dire telle que

$$(\text{Id}_{\mathbf{R}^r} + \beta) \circ f = F_* \circ (\text{Id}_{\mathbf{R}^r} + \beta).$$

L'application $h = \text{Id}_{\mathbf{R}^r} + \beta$ relève une application continue $H : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$ telle que $H \circ F = \widehat{F}_* \circ H$. Il reste à prouver que H est surjective. Ceci peut-être prouvé par des arguments de topologie algébrique, c'est une conséquence du fait que $\deg(H) \neq 0$. On a une preuve très simple dans le cas où $r = 2$. L'ensemble $H(\mathbf{T}^2)$ est compact et invariant par \widehat{F}_* , car $H \circ F = \widehat{F}_* \circ H$. L'ensemble des points périodiques de \widehat{F}_* étant dense, il suffit de prouver que $H(\mathbf{T}^2)$ contient tout point périodique \widehat{x} . Ce sera le cas si $H(\mathbf{T}^2)$ rencontre $W^s(\widehat{x})$. Fixons un antécédent $x \in \mathbf{R}^2$ de \widehat{x} par

la projection de revêtement π et remarquons que $\pi^{-1}(H(\mathbf{T}^2))$ rencontre $W^s(x) = x + E^s$. En effet $\pi^{-1}(H(\mathbf{T}^2)) = h(\mathbf{R}^2)$ est connexe et invariant par les translations entières. \square

La proposition suivante nous dit que tout automorphisme linéaire hyperbolique \widehat{A} de \mathbf{T}^r est C^1 -structurellement stable : si F est un difféomorphisme proche de \widehat{A} en C^1 -topologie, alors F est conjugué à A . En d'autres termes, il existe $\varepsilon > 0$ tel que F est conjugué à \widehat{A} si

$$\begin{aligned} \sup_{\widehat{x} \in \mathbf{T}^r} d(F(\widehat{x}), \widehat{A}(\widehat{x})) &\leq \varepsilon \\ \sup_{\widehat{x} \in \mathbf{T}^r} d(F^{-1}(\widehat{x}), \widehat{A}^{-1}(\widehat{x})) &\leq \varepsilon \\ \sup_{\widehat{x} \in \mathbf{T}^r} \|DF(\widehat{x}) - A\| &\leq \varepsilon \\ \sup_{\widehat{x} \in \mathbf{T}^r} \|DF^{-1}(\widehat{x}) - A^{-1}\| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En fait, on a résultat plus précis :

PROPOSITION 4.5.2 : *Soit A un automorphisme linéaire λ -hyperbolique. Notons $E = E^s \oplus E^u$ la décomposition hyperbolique de A et considérons une norme adaptée $\| \cdot \|$. Soit $F : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$ une application de classe C^1 -telle que*

$$\begin{aligned} \sup_{\widehat{x} \in \mathbf{T}^r} d(F(\widehat{x}), \widehat{A}(\widehat{x})) &\leq \varepsilon_2 = \frac{1}{4} \min_{k \in \mathbf{Z}^r \setminus \{0\}} \|k\|, \\ \sup_{\widehat{x} \in \mathbf{T}^r} \|DF(\widehat{x}) - A\| &\leq \varepsilon_1 = \min(\|A^{-1}\|^{-1}, 1 - \lambda). \end{aligned}$$

Alors F est un difféomorphisme de classe C^1 et il existe un unique homéomorphisme homotope à l'identité $H : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$ tel que $H \circ F = \widehat{A} \circ H$.

Démonstration. On sait que la condition

$$\sup_{\widehat{x} \in \mathbf{T}^r} d(F(\widehat{x}), \widehat{A}(\widehat{x})) \leq \varepsilon_2$$

implique que $F_* = A$. Fixons un relèvement $f : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$ de F . On peut écrire $f = A + \psi$, où $\psi : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$ est une application de classe C^1 invariante par les translations entières. Commençons par prouver que f (et F) sont des difféomorphismes. Pour cela, énonçons la version différentiable du théorème de point fixe avec paramètre.

LEMME 4.5.3 : *Soit E et F deux espaces vectoriels normés, F étant un espace de Banach. Soit $\Phi : E \times F \rightarrow F$ une application de classe C^p , $p \geq 1$, telle que*

$$\sup_{x,y} \|D_2\Phi(x,y)\| = \lambda < 1.$$

Alors, pour tout $x \in E$, il existe une unique solution $y = \theta(x)$ de l'équation $\Phi(x,y) = y$. De plus, l'application θ est de classe C^p et on a

$$D\theta(x) = (\text{Id}_F - D_2\Phi(x, \theta(x)))^{-1} \circ D_1\Phi(x, \theta(x)).$$

Démonstration. Chaque application

$$y \mapsto \Phi(x, y)$$

est lipschitzienne de rapport λ . On peut donc appliquer le théorème du point fixe avec paramètre et obtenir une fonction $\theta : E \rightarrow F$, où $y = \theta(x)$ est l'unique solution de l'équation $\Phi(x, y) = y$. Pour prouver que θ est de classe C^p , il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation

$$\Phi(x, y) - y = 0$$

en un point $(x_0, \theta(x_0))$. On peut résoudre localement l'équation (car $\text{Id}_F - D_2\Phi(x_0, \theta(x_0))$ est inversible) et obtenir une fonction $\tilde{\theta}$ de classe C^p définie sur un voisinage de x_0 . Mais cette fonction n'est rien d'autre que la restriction de θ à ce voisinage. \square

LEMME 4.5.4 : *L'application $f = A + \psi$ est un difféomorphisme de classe C^1 .*

Démonstration. Remarquons que

$$f(x) = y \Leftrightarrow A(x) + \psi(x) = y \Leftrightarrow x = A^{-1}(y) - A^{-1} \circ \psi(x).$$

La fonction

$$\Phi : (x, y) \mapsto A^{-1}(y) - A^{-1} \circ \psi(x)$$

est de classe C^1 et chaque application partielle $x \mapsto \Phi(x, y)$ est lipschitzienne de rapport $\|A^{-1}\|\varepsilon$ puisque

$$\sup_{x,y} \|D_2\Phi(x, y)\| = \|A^{-1}\|\varepsilon < 1.$$

Utilisant le lemme 4.5.3, on obtient une fonction $\theta : E \rightarrow E$ de classe C^1 telle que

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \theta(y).$$

Ceci signifie que f est un difféomorphisme de classe C^1 . \square

La proposition 4.4.1 nous dit qu'il existe un unique homéomorphisme $h : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$ tel que $h \circ f = A \circ h$ et tel que $h - \text{Id}_{\mathbf{R}^r}$ soit borné, la proposition 4.5.1 qu'il existe une unique application continue $h : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$ telle que $h \circ f = A \circ h$ et telle que soit $h - \text{Id}_{\mathbf{R}^r}$ soit \mathbf{Z}^r -périodique. On en déduit que $h = h'$ relève un homéomorphisme H de \mathbf{T}^2 homotope à l'identité. \square

4.6 Le théorème d'Hartman-Grobman.

Le théorème d'Hartman-Grobman est un résultat de conjugaison locale :

THÉORÈME 4.6.1 : *Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}^r$ une application de classe C^1 définie sur une partie ouverte U de \mathbf{R}^r ayant un point fixe x_0 tel que la différentielle $T = Df(x_0)$ est un automorphisme hyperbolique. Alors il existe un voisinage $V \subset U$ de x_0 , un voisinage W de 0 et un homéomorphisme $h : V \rightarrow W$ tel que tout pour tout $x \in V$, le point $f(x)$ appartient à V si et seulement si $T(h(x))$ appartient à W et dans ce cas, on a $f(x) = h^{-1}(T(h(x)))$.*

Démonstration. Quitte à conjuguer f par une translation, on peut toujours supposer que $x_0 = 0$. Le théorème est une conséquence du théorème 4.4.1 et du lemme d'extension suivant, si on choisit ε assez petit.

LEMME 4.6.2 : Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut construire une fonction $\tilde{f} : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$ telle que :

- i) \tilde{f} et f coïncident sur un voisinage de 0;
- ii) $\tilde{f} - T$ est bornée et lipschitzienne de rapport ε .

Proof. Considérons la fonction $\eta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ où

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 2, \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

en remarquant qu'elle est lipschitzienne de rapport 1. Fixons α_0 tel que $B(0, 2\alpha_0) \subset U$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha < \alpha_0$ tel que pour tout $x \in B(0, 2\alpha)$ on a

$$\|Df(x) - T\| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

ce qui implique que pour tous x et y dans $B(0, 2\alpha)$ on a

$$\|f(x) - T(x) - f(y) + T(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}\|x - y\|.$$

En posant $y = 0$, on obtient

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}\|x\|.$$

Définissons

$$\tilde{f}(x) = \left(1 - \eta\left(\frac{\|x\|}{\alpha}\right)\right) f(x) + \eta\left(\frac{\|x\|}{\alpha}\right) T(x).$$

Cette formule a un sens car $1 - \eta\left(\frac{\|x\|}{\alpha}\right)$ s'annule si $\|x\| \geq 2\alpha$. Posons

$$\varphi(x) = \tilde{f}(x) - T(x) = \left(1 - \eta\left(\frac{\|x\|}{\alpha}\right)\right) (f(x) - T(x)).$$

L'application φ est bornée et s'annule hors de $B(0, 2\alpha)$. Prouvons qu'elle est lipschitzienne de rapport ε . Fixons x et y dans \mathbf{R}^r . Si $\|x\| \geq 2\alpha$ et $\|y\| \geq 2\alpha$, on a

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|0 - 0\| = 0.$$

Si $\|x\| \leq 2\alpha$ et $\|y\| \geq 2\alpha$, on a

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x) = \left(\eta\left(\frac{\|y\|}{\alpha}\right) - \eta\left(\frac{\|x\|}{\alpha}\right)\right) (f(x) - T(x))$$

et donc

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \left|\eta\left(\frac{\|y\|}{\alpha}\right) - \eta\left(\frac{\|x\|}{\alpha}\right)\right| \|f(x) - T(x)\| \leq \frac{\|x - y\|}{\alpha} \frac{2\varepsilon\alpha}{4} \leq \varepsilon\|x - y\|.$$

Si $\|x\| \leq 2\alpha$ et $\|y\| \leq 2\alpha$, on a

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \left(1 - \eta\left(\frac{\|x\|}{\alpha}\right)\right) (f(x) - f(y) - T(x) + T(y)) + \left(\eta\left(\frac{\|y\|}{\alpha}\right) - \eta\left(\frac{\|x\|}{\alpha}\right)\right) (f(y) - T(y))$$

et donc

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}\|x - y\| + \frac{\|x - y\|}{\alpha} \frac{2\varepsilon\alpha}{4} \leq \varepsilon\|x - y\|.$$

□

Remarque. On peut légèrement modifier le raisonnement en choisissant une fonction lisse η vérifiant

$$\begin{cases} \eta(x) = 0 & \text{si } x \leq 1, \\ \eta(x) = 1 & \text{si } x \geq 2, \\ 0 \leq \eta'(x) \leq 2 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

et une norme euclidienne $\| \cdot \|$. On en déduit que si f est de classe C^p , il en est de même de φ .

4.7 Le théorème de la variété stable.

On va énoncer un autre théorème local, qui est complémentaire au théorème d'Hartman-Grobman. Commençons par l'énoncé suivant :

PROPOSITION 4.7.1 : Soit $T : E \rightarrow E$ un endomorphisme λ -hyperbolique d'un espace de Banach E , où $E = E^s \oplus E^u$ est la décomposition hyperbolique et $\| \cdot \|$ une norme adaptée. Soit $\varphi : E \rightarrow E$ une fonction bornée et lipschitzienne de rapport $\varepsilon < \varepsilon_0 = 1 - \lambda$ vérifiant $\varphi(0) = 0$. Si on note $f = T + \varphi$, alors l'ensemble $W^s(0)$ des points $x \in E$ tels que la suite $(f^n(x))_{n \geq 0}$ est bornée est la graphe d'une fonction $\psi : E^s \rightarrow E^u$ qui est lipschitzienne de rapport $(\lambda + \varepsilon)$ (on identifie ici E et $E^s \times E^u$). De plus, f est lipschitzienne de rapport $\lambda + \varepsilon$ sur ce graphe et on a donc

$$W^s(0) = \{x \in E \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0.\}$$

Démonstration. Fixons $r \in]\lambda + \varepsilon, 1]$ puis définissons l'ensemble \mathcal{E} des suites $x = (x_n)_{n \geq 0}$ dans E telles que la suite $(r^{-n}x_n)_{n \geq 0}$ est bornée. C'est un espace de Banach quand on le munit de la norme

$$\|x\| = \sup_{n \geq 0} r^{-n} \|x_n\|.$$

On a une décomposition $\mathcal{E} = E^s \oplus \mathcal{E}^s \oplus \mathcal{E}^u$, où \mathcal{E}^s est l'espace des suites $x = (x_n)_{n \geq 1}$ dans E^s telles que la suite $(r^{-n}x_n)_{n \geq 1}$ est bornée et \mathcal{E}^u est l'espace des suites $x = (x_n)_{n \geq 0}$ dans E^u telles que la suite $(r^{-n}x_n)_{n \geq 0}$ est bornée.

A chaque suite $(x_n)_{n \geq 0} = (x_n^s + x_n^u)_{n \geq 0}$ on peut associer deux suites $(y_n^s)_{n \geq 1}$ et $(y_n^u)_{n \geq 0}$ en posant

$$\begin{aligned} y_{n+1}^s &= f^s(x_n^s, x_n^u) = T^s(x_n^s) + \varphi^s(x_n^s, x_n^u) \\ y_n^u &= x_n^u + (T^u)^{-1}(x_{n+1}^u - f^u(x_n^s, x_n^u)) = (T^u)^{-1}(x_{n+1}^u - \varphi^u(x_n^s, x_n^u)) \end{aligned}$$

Remarquons que si $(\tilde{y}_n^s)_{n \geq 1}$ et $(\tilde{y}_n^u)_{n \geq 0}$ sont associées à une autre suite $(\tilde{x}_n)_{n \geq 0} = (\tilde{x}_n^s + \tilde{x}_n^u)_{n \geq 0}$, alors

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}^s - \tilde{y}_{n+1}^s\| &\leq (\lambda + \varepsilon) \|x_n - \tilde{x}_n\| \\ \|y_n^u - \tilde{y}_n^u\| &\leq \lambda \|x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}\| + \lambda \varepsilon \|x_n - \tilde{x}_n\|. \end{aligned}$$

Comme les deux suites associées à la suite nulle sont les suites nulles, on en déduit que $(y_n^s)_{n \geq 1} \in \mathcal{E}^s$ et $(y_n^u)_{n \geq 0} \in \mathcal{E}^u$. On a donc défini une application

$$\Phi : \mathcal{E} \sim E^s \times \mathcal{E}^s \times \mathcal{E}^u \rightarrow \mathcal{E}^s \times \mathcal{E}^u.$$

Cette application est lipschitzienne de rapport $\frac{\lambda + \varepsilon}{r}$. En effet,

$$r^{-n-1} \|y_{n+1}^s - \tilde{y}_{n+1}^s\| \leq r^{-n-1} (\lambda + \varepsilon) \|x_n - \tilde{x}_n\| \leq \frac{\lambda + \varepsilon}{r} \|x - \tilde{x}\|$$

et

$$r^{-n}\|y_n^u - \tilde{y}_n^u\| \leq \lambda \varepsilon r^{-n}\|x_n - \tilde{x}_n\| + \lambda r^{-n}\|x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}\| \leq (\lambda \varepsilon + \lambda r)\|x - \tilde{x}\| \leq \frac{\lambda + \varepsilon}{r}\|x - \tilde{x}\|.$$

Puisque $\frac{\lambda + \varepsilon}{r} < 1$, on peut appliquer la version à paramètre du théorème de point fixe (théorème 4.3.1) : pour tout $x_0^s \in E^s$, il existe $\theta(x_0^s) \in \mathcal{E}^s \times \mathcal{E}^u$, uniquement défini et dépendant continûment de x_0^s , tel que $\theta(x_0^s) = \Phi(x_0^s, \theta(x_0^s))$. En écrivant

$$\theta(x_0^s) = ((\theta_n^s(x_0^s))_{n \geq 1}, (\theta_n^u(x_0^s))_{n \geq 0}),$$

on obtient

$$x_{n+1}^s = f^s(x_n^s, x_n^u), \quad x_{n+1}^u = f^u(x_n^s, x_n^u).$$

En d'autres termes, le théorème nous dit que pour tout x_0^s , il existe un unique point $x_0^u = \theta_0^u(x_0^s) \in E^u$ tel que la suite $(f^n(x_0^s, x_0^u))_{n \geq 0}$ appartient à \mathcal{E} et de plus la fonction $\psi = \theta_0^u$ est continue. Si on prend $r = 1$, on en déduit que l'ensemble des points x dont l'orbite positive est bornée est le graphe de ψ . De plus la suite $(r^{-n}f^n(x))_{n \geq 0}$ est bornée pour tout $r > \lambda + \varepsilon$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0$ si la suite $(f^n(x))_{n \geq 0}$ est bornée. Prouvons maintenant que θ est lipschitzienne de rapport $(\lambda + \varepsilon)$, ce qui impliquera une propriété analogue pour ψ . Si on pose $r = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\theta(x_0^s) - \theta(\tilde{x}_0^s)\| &= \|\Phi(x_0^s, \theta(x_0^s)) - \Phi(\tilde{x}_0^s, \theta(\tilde{x}_0^s))\| \\ &\leq (\lambda + \varepsilon) \max(\|x_0^s - \tilde{x}_0^s\|, \|\theta(x_0^s) - \theta(\tilde{x}_0^s)\|) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|\theta(x_0^s) - \theta(\tilde{x}_0^s)\| \leq (\lambda + \varepsilon)\|x_0^s - \tilde{x}_0^s\|.$$

Il reste à prouver que la restriction de f au graphe de ψ est lipschitzienne de rapport $(\lambda + \varepsilon)$. Pour cela, notons que

$$\begin{aligned} \|f(x_0^s, \psi(x_0^s)) - f(\tilde{x}_0^s, \psi(\tilde{x}_0^s))\| &= \|f^s(x_0^s, \psi(x_0^s)) - f^s(\tilde{x}_0^s, \psi(\tilde{x}_0^s))\| \\ &\leq \lambda\|x_0^s - \tilde{x}_0^s\| + \varepsilon\|(x_0^s, \psi(x_0^s)) - (\tilde{x}_0^s, \psi(\tilde{x}_0^s))\| \\ &\leq (\lambda + \varepsilon)\|(x_0^s, \psi(x_0^s)) - (\tilde{x}_0^s, \psi(\tilde{x}_0^s))\|. \end{aligned}$$

□

On peut améliorer le résultat

PROPOSITION 4.7.2 : *En gardant les hypothèses de la proposition 4.7.1 et en supposant de plus que φ est de classe C^p et que $D\varphi(0) = 0$, on peut montrer que ψ également de classe C^p et vérifie $D\psi(0) = 0$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la version différentiable du théorème de point fixe avec paramètre (Lemme 4.5.3). Il faut donc prouver que la fonction Φ introduite dans la preuve précédente est de classe C^p . Elle vérifiera nécessairement $\|D\Phi(x)\| \leq \frac{\lambda + \varepsilon}{r}$ puisqu'elle est lipschitzienne de rapport $\frac{\lambda + \varepsilon}{r}$. Il n'est pas difficile de voir qu'il suffit de prouver que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ (x_n)_{n \geq 0} &\mapsto (f(x_n))_{n \geq 0} \end{aligned}$$

est de classe C^p . On doit nécessairement supposer que $r < 1$ (sinon, c'est faux). On va se limiter à prouver qu'elle est de classe C^1 et que la différentielle en $x = (x_n)_{n \geq 0}$ est la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \\ (h_n)_{n \geq 0} &\mapsto (Df(x_n) \cdot h_n)_{n \geq 0} \end{aligned}$$

Notons que cette application est bien définie car $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, ce qui implique que la suite $(Df(x_n))_{n \geq 0}$ est bornée. Écrivons

$$f(x_n + h_n) - f(x_n) - Df(x_n) \cdot h_n = \int_0^1 (Df(x_n + th_n) - Df(x_n)) \cdot h_n dt.$$

Supposons que $\|h\| \leq 1$ et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $\|Df(x_n + th_n) - Df(x_n)\| \leq \varepsilon$. De plus, il existe $\eta \in (0, 1)$ tel que si $\|h\| \leq \eta$, alors pour tout $n < N$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $\|Df(x_n + th_n) - Df(x_n)\| \leq \varepsilon$. Ainsi, si $\|h\| \leq \eta$, alors

$$\|f(x + h) - f(x) - \mathcal{L} \cdot h\| \leq \varepsilon \|h\|,$$

ce qui signifie que f est différentiable en x et que $Df(x) = \mathcal{L}$.

On peut calculer $D\psi(0)$ directement. On peut utiliser également l'argument suivant. Puisque

$$\psi(f^s(x^s), \psi(x^s)) = f^u(x^s, \psi(x^s))$$

et

$$\begin{aligned} \psi(x^s) &= D\psi(0) \cdot x^s + o(x^s) \\ f^s(x^s, \psi(x^s)) &= T^s \cdot x^s + o(x^s) \\ f^u(x^s, \psi(x^s)) &= T^u \cdot \psi(x^s) + o(x^s) = T^u \circ D\psi(0) \cdot x^s + o(x^s) \end{aligned},$$

on sait que

$$D\psi(0) \circ T^s \cdot x^s = T^u \circ D\psi(0) \cdot x^s + o(x^s),$$

et donc que

$$D\psi(0) \circ T^s = T^u \circ D\psi(0),$$

ce qui implique

$$D\psi(0) = (T^u)^{-n} \circ D\psi(0) \circ (T^s)^n,$$

for every $n \geq 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $D\psi(0) = 0$. □

Énonçons maintenant le théorème de la variété stable locale :

THÉORÈME 4.7.3 : *Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}^r$ une application de classe C^p , $p \geq 1$, définie au voisinage d'un point fixe x_0 . On suppose que $Df(x_0)$ est λ -hyperbolique, $\lambda \in (0, 1)$, on note $\mathbf{R}^r = E^s \oplus E^u$ la décomposition hyperbolique et on considère une norme adaptée $\|\cdot\|$. Fixons $\lambda' \in]\lambda, 1[$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que l'ensemble $W_\delta^s(x_0)$ des points $x \in U$ vérifiant $\|f^n(x) - x_0\| \leq \delta$ pour tout $n \geq 0$ est le graphe d'une fonction de classe C^p*

$$\psi : x_0 + \left(E^s \cap \overline{B(0, \delta)} \right) \rightarrow E^u \cap \overline{B(0, \delta)}$$

vérifiant

$$\psi(x_0) = 0, \quad D\psi(x_0) = 0.$$

De plus, pour tout $x_0 \in W_\delta^s(x_0)$ et tout $n \geq 0$, on a

$$\|f^n(x) - x_0\| \leq \lambda^n \|x - x_0\|.$$

Démonstration. On peut toujours supposer que $x_0 = 0$. D'après la remarque qui suit le lemme 4.6.2, on sait qu'il existe une application $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^p qui coïncide avec f au voisinage de x_0 , tel que $\tilde{f} - Df(0)$ est lipschitzienne de rapport $(\lambda' - \lambda)$. Soit $\tilde{\psi} : E^s \rightarrow E^u$ l'application donnée par la proposition 4.7.1. Si $\delta > 0$ est assez petit, f et \tilde{f} coïncident sur la boule $\overline{B(0, \delta)}$ de E . Définissons maintenant ψ comme la restriction de $\tilde{\psi}$ à la boule $\overline{B(0, \delta)}$ de E^s . \square

Remarques. L'ensemble $W_\delta^s(x_0)$ est appelée la *variété stable locale* de x_0 . Dans le cas où les valeurs propres de $Df(x_0)$ ont toutes un module < 1 , alors $W_\delta^s(x_0) = \overline{B(x_0, \delta)}$. Dans ce cas, on dit que x_0 est un *puits* ou un *point fixe attractif*: tout point d'un voisinage de x_0 est attiré par ce point. Dans le cas où $Df(x_0)$ est un automorphisme hyperbolique, alors f est un difféomorphisme local et on peut définir de façon similaire la *variété instable* $W_\delta^u(x_0)$ de x_0 . Les ensembles $W_\delta^s(x_0)$ et $W_\delta^u(x_0)$ sont des sous-variétés de dimensions complémentaires (respectivement de dimensions $\dim(E^s)$ et $\dim(E^u)$). Elles sont tangentes à E^s et à E^u en x_0 et ne s'intersectent qu'en ce point. Dans le cas où les valeurs propres de $Df(x_0)$ ont toutes un module > 1 , alors $W_\delta^u(x_0) = \overline{B(x_0, \delta)}$. Dans ce cas, on dit que x_0 est une *source* ou un *point fixe répulsif*.

Nous allons conclure cette section avec le théorème de la variété stable globale :

THÉORÈME 4.7.4 : *Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^p , $p \geq 1$, sur une variété M qui fixe x_0 . Supposons que $T_{x_0}f$ est hyperbolique et que $T_{x_0}M = E^s \oplus E^u$ est la décomposition hyperbolique. L'ensemble*

$$W^s(x_0) = \{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_0\}$$

est l'image d'une immersion injective $\theta^s : E^s \rightarrow \mathbf{R}^r$ de classe C^p telle que $\theta^s(0) = x_0$ et telle que $T_0\theta^s$ est l'inclusion $i^s : E^s \rightarrow T_{x_0}M$. On l'appelle la variété stable de x_0 . L'ensemble

$$W^u(x_0) = \{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = x_0\}$$

est l'image d'une immersion injective $\theta^u : E^u \rightarrow \mathbf{R}^r$ de classe C^p telle que $\theta^u(0) = x_0$ et telle que $T_0\theta^u$ est l'inclusion $i^u : E^u \rightarrow T_{x_0}M$. On l'appelle la variété instable de x_0 .

Démonstration. On suppose que $T_{x_0}f$ est λ -hyperbolique et on considère une norme $\|\cdot\|$ adaptée. On munit M d'une structure riemannienne et on note $\Phi : T_{x_0}M \rightarrow M$ l'application exponentielle. C'est un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $T_{x_0}M$ et un voisinage de x_0 dans M tel que $T_0\Phi = \text{Id}_{T_{x_0}M}$. Ainsi, il existe un difféomorphisme $\tilde{f} : T_{x_0}M \rightarrow T_{x_0}M$ de classe C^p qui coïncide avec $\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$ sur une boule $\overline{B(0, \delta)}$, et telle que $\tilde{f} - T_{x_0}f$ est lipschitzienne de rapport $\lambda' - \lambda$. Soit $\tilde{\psi} : E^s \rightarrow E^u$ l'application introduite précédemment. Pour tout $x \in E^s$, il existe $n \geq 0$ tel que $\|\tilde{f}^n(x, \tilde{\psi}(x))\| \leq \delta$. Posons $\theta(x) = f^{-n}(\Phi(\tilde{f}^n(x, \tilde{\psi}(x))))$ et remarquons que $\theta(x)$ ne dépend pas de l'entier n . Remarquons également que θ est de classe C^p , est une immersion injective et que son image est exactement $W^s(x_0)$. On fait la même chose pour la variété instable.

□

Remarques.

i) Dans le cas où x_0 est un puits (resp. une source), l'ensemble $W^s(x_0)$ (resp. $W^u(x_0)$) est une partie ouverte connexe appelée *bassin d'attraction* (resp. *basin de répulsion*) de x_0 .

ii) Les variétés $W^s(x_0)$ et $W^u(x_0)$ peuvent s'intersecter en un point différent de x_0 , comme on l'a vu dans le cas des automorphismes hyperboliques de \mathbf{T}^r .

ii) Soit f un difféomorphisme de classe C^1 d'une variété M et x_0 un point périodique de f , de période q . On dira que x_0 est *hyperbolique* si $T_{x_0}f^q : T_{x_0}M \rightarrow T_{x_0}M$ est hyperbolique. On peut appliquer le théorème de la variété stable à f^q . Les ensembles $W^s(x_0)$ et $W^u(x_0)$ vérifient les propriétés suivantes

$$W^s(x_0) = \{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(x_0)) = 0\},$$

$$W^u(x_0) = \{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(x_0)) = 0\}.$$

4.8 Ensembles hyperboliques

Soit f un difféomorphisme de classe C^1 sur une variété lisse M munie d'une métrique riemannienne. On dit qu'une partie compacte invariante X est *hyperbolique* s'il existe pour tout point $x \in X$ une décomposition $E(x) = E^s(x) \oplus E^u(x)$, un réel $\mu < 1$ et une constante $C > 0$ tels que

- pour tout $v \in E^s(x)$ et tout $n \geq 0$, on a $\|Tf^n(x).v\| \leq C\mu^n\|v\|$;
- pour tout $v \in E^u(x)$ et tout $n \geq 0$, on a $\|Tf^{-n}(x).v\| \leq C\mu^n\|v\|$.

Il n'est pas difficile de voir que cette condition est indépendante de la structure choisie et que les fonctions $x \mapsto E^s(x)$ et $x \mapsto E^u(x)$ sont continues. En particulier la dimension des espaces stables et instables est localement constante (mais pas nécessairement constante). L'exemple le plus simple est celui d'une orbite périodique hyperbolique, mais nous avons vu également les automorphismes hyperboliques du tore, où le tore tout entier est hyperbolique. Nous en verrons d'autres plus loin. Il n'est pas difficile de voir qu'il existe une borne inférieure uniforme à l'angle formé par $E^s(x)$ et $E^u(x)$. On peut également montrer que $f|_X$ est expansif. Le résultat qui suit permet de définir les variétés stables et instables d'un point de X .

THÉOREME 4.8.1 : *Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 et X une partie compacte invariante hyperbolique. On suppose que chaque ensemble $E^s(x)$ est de dimension r_s et chaque ensemble $E^u(x)$ de dimension r_u . Choisissons $\delta > 0$ assez petit et définissons, pour tout $x \in X$, les ensembles*

$$W_{\text{loc}}^s(x) = \{y \in M \mid n \geq 0 \Rightarrow d(f^n(y), f^n(x)) \leq \delta\}$$

et

$$W_{\text{loc}}^u(x) = \{y \in M \mid n \geq 0 \Rightarrow d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \leq \delta\}.$$

i) *Chaque ensemble $W^s(x)$ (resp. $W^u(x)$) est l'image d'un plongement de classe C^1 de la boule euclidienne unité B_{r_s} de \mathbf{R}^{r_s} (resp. B_{r_u} de \mathbf{R}^{r_u}) valant x en 0, qui dépend continûment de x pour la C^1 -topologie (i.e. pour la convergence uniforme du plongement et de l'application dérivée).*

ii) Pour tout $\mu' \in]\mu, 1[$, il existe une constante $C > 0$ tel que

$$y \in W_{\text{loc}}^s(x) \Rightarrow d(f^n(y), f^n(x)) \leq C\mu'^n \text{ si } n \geq 0$$

et

$$y \in W_{\text{loc}}^u(x) \Rightarrow d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \leq C\mu'^n \text{ si } n \geq 0.$$

iii) Pour tout $x \in X$ les ensembles

$$W^s(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(y), f^n(x)) = 0\}$$

et

$$W_{\text{loc}}^u(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) = 0\}$$

sont des plongements de classe C^1 de \mathbf{R} et on a

$$W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_{\text{loc}}^s(f^n(x))), \quad W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{\text{loc}}^s(f^{-n}(x)))$$

On va étudier dans cette section des systèmes dynamiques qui sont facteurs de décalages de type fini. Ce n'est pas toujours le système dynamique qui apparaît comme facteur, mais souvent la partie dynamique la plus intéressante, comme par exemple la restriction à l'ensemble des points non errants. La situation se présente généralement ainsi. On se donne un système dynamique topologique $T : X \rightarrow X$. On écrit $X = \bigcup_{i \in I} R_i$ comme réunion finie de parties fermées dont les intérieurs sont mutuellement disjoints. Une suite $\mathbf{i} = (i_n)_{n \geq 0} \in I^{\mathbf{N}}$ code l'orbite d'un point $x \in X$, si $T^n(x) \in R_{i_n}$ pour tout $n \geq 0$. Une "bonne" décomposition est une décomposition pour laquelle, pour tout $\mathbf{i} = (i_n)_{n \geq 0} \in I^{\mathbf{N}}$ l'ensemble $H(\mathbf{i}) = \bigcap_{n \geq 0} T^{-n}(R_{i_n})$ contient au plus un point. Dans ce cas, l'ensemble Z des suites \mathbf{i} pour lesquelles $H(\mathbf{i})$ est non vide est invariant par le décalage σ , et il est fermé si X est compact. Si on écrit $H(\mathbf{i}) = \{h(\mathbf{i})\}$, on obtient une semi-conjugaison $h : Z \rightarrow X$ de $\sigma|_Z$ à T . Remarquons que si $T : X \rightarrow X$ est expansif et si X est compact, alors toute décomposition formée de parties fermées de diamètre suffisamment petit est une bonne décomposition. Une bonne décomposition est intéressante si la dynamique sur Z peut être décrite précisément. Nous verrons plusieurs cas où Z est l'ensemble

$$X_A = \{\mathbf{i} = (i_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \{1, \dots, p\}^{\mathbf{Z}} \mid A_{i_k, i_{k+1}} = 1 \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z}\}.$$

définie par une matrice carrée $A = (A_{i,j})_{i,j}$ d'ordre p à coefficients égaux à 0 ou 1 et où T est donc un facteur d'un sous-décalage de type fini. On a dans ce cas une *décomposition* (ou par abus de langage *partition*) *de Markov*. Un exemple-type est la partition de Markov $\mathbf{T}^1 = \bigcup_{0 \leq i < p} \left(\left[\frac{i}{p}, \frac{i+1}{p} \right] + \mathbf{Z} \right)$ qui est associée $T : x \mapsto px$. Ici, c'est le décalage sur $\{1, \dots, p\}^{\mathbf{N}}$ qui code les orbites de T . Bien sûr on peut définir de même des partitions de Markov pour des systèmes inversibles avec codage dans $I^{\mathbf{Z}}$.

5.1 L'application logistique

La *famille logistique* $(f_\lambda)_{\lambda > 0}$ est définie ainsi :

$$\begin{aligned} f_\lambda : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \lambda x(1-x). \end{aligned}$$

Commençons par énoncer certaines propriétés simples. Remarquons d'abord que tout point a au plus deux antécédents, que 0 est un point fixe de f_λ et que 1 est envoyé sur ce point fixe. Notons aussi que $[0, 1]$ est positivement invariant si et seulement si $0 \leq \lambda \leq 4$. Dans le cas où $\lambda \geq 1$, remarquons que si $x < 0$, alors la suite $(f_\lambda^n(x))_{n \geq 0}$ est décroissante et vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^n(x) = -\infty$. Cette dernière propriété est encore vraie si $x > 1$ car $f_\lambda(x) < 0$. L'ensemble des points d'orbites bornées s'écrit donc

$$X_\lambda = \bigcap_{n \geq 0} f_\lambda^{-n}([0, 1]).$$

C'est une partie compacte incluse dans $[0, 1]$, égale à cet ensemble si $\lambda \in [1, 4]$ et non connexe si $\lambda > 4$. Tout point $x \notin X_\lambda$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^n(x) = -\infty$.

Le cas le plus intéressant est le cas où $\lambda < 4$, il y a une très grande richesse de dynamiques possibles, c'est une famille étudiée par grand nombre d'auteurs. Dans le cas, où $\lambda = 4$, on peut montrer que $f_\lambda|_{[0,1]}$ est un facteur du décalage de Bernouilli sur $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ à l'aide de la partition

de Markov $\{[0, 1/2], [1/2, 1]\}$. Le cas $\lambda > 4$ est encore plus simple car on peut montrer, à l'aide de la même partition de Markov, que $f_\lambda|_{X_\lambda}$ est conjuguée au décalage. Nous allons en donner une preuve dans le cas où $l > 2 + \sqrt{5}$. Dans cette situation, on aura $|f'_\lambda(x)| > 1$ pour tout $x \in X_\lambda$.

PROPOSITION 5.1.1 : *Supposons que $\lambda > 2 + \sqrt{5}$. Pour tout $\mathbf{i} = (i_n)_{n \geq 0}$ il existe un unique point $x = h(\mathbf{i}) \in X_\lambda$ tel que pour tout entier $n \geq 0$ on a :*

$$\begin{cases} 0 \leq f_\lambda^n(x) \leq \frac{1}{2} & \text{si } i_n = 0, \\ \frac{1}{2} \leq f_\lambda^n(x) \leq 1 & \text{si } i_n = 1. \end{cases}$$

L'application h est un homéomorphisme de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sur $X_\lambda = \bigcap_{n \geq 0} f_\lambda^{-n}([0, 1])$ qui induit une conjugaison entre le décalage de Bernouilli σ et $f_\lambda|_{X_\lambda}$.

Démonstration.. Les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}.$$

On en déduit que $f^{-1}([0, 1]) = \Delta_0 \cup \Delta_1$ où

$$\Delta_0 = \left[0, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}\right], \quad \Delta_1 = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}, 1\right].$$

Remarquons maintenant que le minimum m de $|f'|$ sur $\Delta_0 \cup \Delta_1$ est donné par

$$m = f' \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}} \right) = -f' \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}} \right).$$

Ainsi,

$$m = 2\lambda \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}} = \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda} > \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2 - 4(2 + \sqrt{5})} = 1.$$

Fixons $\mathbf{i} = (i_n)_{n \geq 0}$. On en déduit que, pour tout $N \geq 0$, l'ensemble $\bigcap_{0 \leq n \leq N} f^{-n}(\Delta_{i_n})$ est un intervalle de longueur $\leq m^{-N}$. Ceci implique que $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\Delta_{i_n})$ est réduit à un point $h(\mathbf{i})$. L'application h est évidemment injective et induit une bijection entre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et X_λ (qui est un ensemble de Cantor). Elle induit une conjugaison entre σ et $f_\lambda|_{X_\lambda}$. \square

Remarque. On a une conclusion analogue si $\lambda > 4$ mais la preuve demande un outil plus sophistiqué : la *dérivée schwarzienne*.

5.2 Le fer à cheval de Smale

On va décrire un exemple géométrique dû à S. Smale. Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de \mathbf{R}^2 et $f : R \rightarrow f(R)$ un difféomorphisme tel que :

- $f(R) \cap R$ est la réunion de deux rectangles verticaux $R_0 = [a_0, b_0] \times [c, d]$, $R_1 = [a_1, b_1] \times [c, d]$ où $a < a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < b$;
- $f^{-1}(R) \cap R$ est la réunion de deux rectangles horizontaux $f^{-1}(R_0) = [a, b] \times [c_0, d_0]$, $f^{-1}(R_1) = [a, b] \times [c_1, d_1]$ où $c < c_0 < d_0 < c_1 < d_1 < d$;
- il existe $\lambda < 1 < \mu$ tels que $f|_{f^{-1}(R_0)}$ est une application affine dont la partie linéaire est $(x, y) \mapsto (\lambda x, \mu y)$ et $f|_{f^{-1}(R_1)}$ une application affine dont la partie linéaire est $(x, y) \mapsto (-\lambda x, -\mu y)$.

Si on veut construire un difféomorphisme global, on écrit D_0 pour le demi-disque en dessous de son diamètre $[a, b] \times \{c\}$ et D_1 pour le demi-disque au dessus de son diamètre $[a, b] \times \{d\}$. On note D le disque topologique $D = D_0 \cup D_1 \cup R$ et D' l'adhérence du complémentaire de D dans la sphère de Riemann $S = \mathbf{R}^2 \sqcup \{\infty\}$. On suppose que f est un difféomorphisme défini sur S qui vérifie les propriétés supplémentaires suivantes :

- $f(D_0) \subset \text{Int}(D_0)$ et $\bigcap_{n \geq 0} f^n(D_0) = \{z_0\}$, où z_0 est un point fixe de type puits ;
- $f(D) \subset \text{Int}(D)$ and $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(D') = \{\infty\}$ où ∞ est un point fixe de type source.

Sous ses hypothèses remarquons que $f(D_1) \subset D_0$. Ainsi les points $z \in D$ qui ne sont pas attirés par z_0 sont les points $z \in D$ dont l'orbite positive reste dans R , c'est-à-dire l'ensemble $\bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(R)$. De même, l'ensemble des points $z \in R$ qui n'appartiennent pas au bassin répulsif de ∞ est $\bigcap_{k \leq 0} f^{-k}(R)$.

Remarquons que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\bigcap_{0 \leq k \leq n} f^{-k}(R)$ est la réunion de 2^n rectangles horizontaux de largeur $\mu^{-n}(d - c)$ et, par conséquent que $\bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(R)$ est un ensemble de Cantor de segments horizontaux. De même, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\bigcap_{0 \leq k \leq n} f^k(R)$ est la réunion de 2^n rectangles verticaux de largeur $\lambda^n(b - a)$ et $\bigcap_{k \geq 0} f^k(R)$ un ensemble de Cantor de segments verticaux. En conclusion, l'ensemble invariant maximal contenu dans R , à savoir $X = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(R)$, est un ensemble de Cantor. Remarquons que $f|_X$ est conjugué au décalage bilatéral σ sur $\{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$ par l'homéomorphisme

$$h : (i_k)_{k \in \mathbf{Z}} \mapsto \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(R_{i_k}).$$

La décomposition $\{R_0 \cap X, R_1 \cap X\}$ est une partition de Markov de $f|_X$.

On en déduit alors immédiatement les résultats suivants :

- L'application $f|_X$ est topologiquement transitive.
- Les points périodiques sont denses dans X ainsi que dans $\Omega(f) = X \cup \{z_0\} \cup \{\infty\}$.
- Pour tout point $z = (x, y) \in X$ le segment $W_{\text{loc}}^s(z) = [a, b] \times \{y\}$ est formé de points z' vérifiant $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^k(z'), f^k(z)) = 0$ et le segment $W_{\text{loc}}^u(z) = \{x\} \times [c, d]$ formé de points z' vérifiant $\lim_{k \rightarrow -\infty} d(f^k(z'), f^k(z)) = 0$.
- Il y a quatre points fixes de f ; un puits en z_0 , une source en ∞ , deux points de type selle dans X .
- Il y a $2 + 2^n$ points fixes de f^n . Excepté z_0 et ∞ , tous les autres points sont de type selle et on a $W^s(z) = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(W_{\text{loc}}^s(z))$ et $W^u(z) = \bigcup_{k \geq 0} f^k(W_{\text{loc}}^u(z))$.
- Pour tout point périodique de type selle z , les variétés $W^s(z)$ et $W^u(z)$ ont une intersection transverse en une infinité de points. Si z' est un autre point périodique de type selle, il en est de même de $W^s(z)$ et $W^u(z')$.
- L'entropie topologique de f vaut $\ln 2$, c'est l'entropie $h_\mu(f)$ d'une unique mesure de probabilité, celle-ci est la limite, pour la topologie faible*, des mesures équidistribuées sur les orbites périodiques.
- L'ensemble X est hyperbolique de même que $\Omega(f)$ (puisque'on ajoute à X un puits et une source).

5.3 L'application de Hénon

Nous allons voir maintenant un exemple explicite où apparaît un fer à cheval de Smale. La famille de Hénon $(f_{b,c})_{b \in]0,1], c \in \mathbf{R}}$ est une famille de difféomorphismes du plan définie ainsi :

$$f_{b,c} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x^2 + c - by, x).$$

Remarquons que la réciproque de $f_{b,c}$ est

$$f_{b,c}^{-1} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (y, \frac{y^2 - x + c}{b}).$$

Cette famille est également extrêmement riche du point de vue dynamique. Là-encore nous allons nous intéresser à une situation simple.

Remarquons d'abord que le jacobien de $f = f_{b,c}$ est constant égal à b . Ceci implique que f préserve l'orientation. Dans le cas où $b = 1$, le difféomorphisme f préserve la mesure de Lebesgue ; dans le cas où $b < 1$, au contraire f "diminue les aires". Remarquons que $(x_k, y_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est une orbite de f si et seulement si

$$x_k^2 + c = x_{k+1} + bx_{k-1}$$

et

$$y_k = x_{k-1}.$$

En particulier, les orbites bornées de f correspondent aux orbites bornées $(x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ définies par la première relation de récurrence.

PROPOSITION 5.3.1 : *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $c > \frac{1}{4}(1+b)^2$;
- f n'a pas de point fixe ;
- pour tout point $z \in \mathbf{R}^2$, on a $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \|f^k(z)\| = +\infty$.

Démonstration.. L'existence d'un point fixe est équivalent à l'existence d'une solution réelle à l'équation (*) :

$$x^2 + c = (1+b)x,$$

et donc à l'inégalité $c \leq \frac{1}{4}(1+b)^2$.

Pour montrer la proposition, on doit prouver qu'en l'absence de solution réelle à l'équation (*), alors pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ telle que

$$x_k^2 + c = x_{k+1} + bx_{k-1},$$

on a $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} |x_k| = +\infty$. Remarquons que

$$(1+b)|x_k| < x_k^2 + c = x_{k+1} + bx_{k-1},$$

et donc que

$$x_k \leq |x_k| < \max(x_{k-1}, x_{k+1}).$$

Si la suite $(x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est décroissante (resp. croissante) à partir d'un certain rang, on a nécessairement $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = -\infty$ (resp. $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$) puisqu'il n'y a pas de solution réelle à l'équation (*). Si la suite $(x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ n'est pas décroissante, il existe k_0 tel que $x_{k_0-1} \leq x_{k_0}$. On en déduit alors que la suite $(x_k)_{k \geq k_0}$ est croissante. On montre de la même façon que $\lim_{k \rightarrow -\infty} |x_k| = +\infty$. \square

Remarque. Un résultat de Brouwer affirme qu'un homéomorphisme du plan f qui préserve l'orientation et qui n'a pas de point fixe, n'a que des points errants. On en déduit en particulier que pour tout $z \in \mathbf{R}^2$, on a $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \|f^k(z)\| = +\infty$.

PROPOSITION 5.3.2 : *Supposons que $c \leq \frac{1}{4}(1+b)^2$ et posons*

$$M = \frac{1}{2} \left(1 + b + \sqrt{(1+b)^2 - 4c} \right).$$

Fixons $z \in \mathbf{R}^2$. Trois cas sont possibles :

- $f^k(z) \in [-M, M]^2$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f^k(z)\| = +\infty$;
- $\lim_{k \rightarrow -\infty} \|f^k(z)\| = +\infty$.

Démonstration. Remarquons que si $|x_{k_0}| > M$, alors on a

$$x_{k_0} \leq |x_{k_0}| < \max(x_{k_0-1}, x_{k_0+1}) \leq \max(|x_{k_0-1}|, |x_{k_0+1}|),$$

car

$$(1+b)|x_{k_0}| < x_{k_0}^2 + c = x_{k_0+1} + bx_{k_0-1}.$$

Comme précédemment, on en déduit que la suite $(|x_k|)_{k \geq k_0}$ est strictement croissante et vérifie $\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k| = +\infty$ ou alors que la suite $(|x_k|)_{k \leq k_0}$ est strictement décroissante et vérifie $\lim_{k \rightarrow -\infty} |x_k| = +\infty$. \square

En particulier, si $c \leq 0$, l'ensemble des points d'orbites bornées est la partie compacte invariante

$$X = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}([-M, M])^2.$$

Cette partie est non vide puisqu'elle contient un point fixe, et tout point $z \notin X$ vérifie

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f^k(z)\| = +\infty \text{ ou } \lim_{k \rightarrow -\infty} \|f^k(z)\| = +\infty.$$

Nous allons voir que si c est suffisamment petit, la dynamique sur X se décrit par une partition de Markov

PROPOSITION 5.3.3 : *Supposons que $c \leq -10$. Alors $f|_X$ est conjuguée au décalage de Bernouilli σ sur $\{-1, +1\}^{\mathbf{Z}}$ par la partition de Markov $\{X \cap [-M, M] \times [-M, 0], X \cap [-M, M] \times [0, M]\}$. De plus, X est hyperbolique et tous les points périodiques sont de type selle.*

Démonstration. On considère l'espace métrique complet (\mathcal{B}, d) des suites $\mathbf{x} = (x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ dans $[-M, M]$ muni de la distance

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sup_{k \in \mathbf{Z}} |x_k - x'_k|.$$

Remarquons que pour toute suite $\mathbf{x} = (x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ dans \mathcal{B} , on a

$$x_{k+1} + bx_{k-1} - c \leq (1+b)M - c = M^2$$

et

$$\begin{aligned} x_{k+1} + bx_{k-1} - c &\geq -M(1+b) - c \\ &\geq -2M - c \\ &= -(1+b) - \sqrt{(1+b)^2 - 4c} - c \\ &\geq -2 - \sqrt{4-4c} - c \\ &\geq -2 - \sqrt{44} + 10 = \alpha^2 > 1. \end{aligned}$$

En particulier, pour toute orbite bornée $(x_k, y_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de f , on a $|x_k| \geq \alpha$ et $|y_k| \geq \alpha$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbf{Z}} \in \{-1, 1\}^{\mathbf{Z}}$, on définit une application

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon &: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{y} \end{aligned}$$

où

$$y_k = \varepsilon_k \sqrt{x_{k+1} + bx_{k-1} - c}.$$

C'est une contraction puisque

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon_k \sqrt{x_{k+1} + bx_{k-1} - c} - \varepsilon'_k \sqrt{x'_{k+1} + bx'_{k-1} - c} \right| &= \left| \frac{x_{k+1} + bx_{k-1} - x'_{k+1} - b'x_{k-1}}{\sqrt{x_{k+1} + bx_{k-1} - c} + \sqrt{x'_{k+1} + bx'_{k-1} - c}} \right| \\ &\leq \frac{2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{2\alpha} \end{aligned}$$

pour tous \mathbf{x} et \mathbf{x}' dans \mathcal{B} . Ainsi, Φ_ε a un unique point fixe.

Posons $R_{-1} = [-M, 0] \times [-M, M]$ et $R_1 = [0, M] \times [-M, M]$. On a montré que pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbf{Z}}$, l'ensemble $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} f^{-k}(R_{\varepsilon_k})$ est réduit à un unique point $h(\varepsilon)$, et que l'orbite d'un tel point ne rencontre jamais la bande $[-1, 1] \times [-M, M]$. De plus, l'image de h est exactement X . Il est facile d'en déduire que h est un homéomorphisme de $\{-1, 1\}^{\mathbf{Z}}$ sur X qui conjugue σ à $f|_X$.

Pour prouver que toute orbite périodique est un point selle, munissons \mathbf{R}^2 de la norme $(x, y) = \max(|x|, |y|)$ et considérons la matrice jacobienne

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fixons $(x, y) \in X$ puis un vecteur (u, v) tel que $|u| \geq |v|$. Si $(u', v') = Df(x, y) \cdot (u, v)$, alors

$$|u'| \geq (2\alpha - 1)|u| \geq |v'|$$

et donc

$$\|(u', v')\| = |u'| \geq (2\alpha - 1)|u| = (2\alpha - 1)\|(u, v)\|.$$

On a montré que le cône d'équation $|v| \leq |u|$ est envoyé dans son intérieur par toute matrice $Df(x, y)$, $(x, y) \in X$, et que $Df(x, y)$ dilate la longueur d'un vecteur dans ce cône par un

coefficient multiplicatif $\geq 2\alpha - 1$. Si z est un point périodique de période q , on sait que $Df^q(z) = Df(f^{q-1}(z)) \circ \dots \circ Df(z)$ envoie le cône d'équation $|v| \leq |u|$ dans son intérieur et dilate la longueur d'un vecteur dans ce cône par un coefficient multiplicatif $\geq (2\alpha - 1)^q$. Ceci implique que l'une des valeurs propres λ de $Df^q(z)$ vérifie $|\lambda| \geq (2\alpha - 1)^q > 1$. L'autre valeur propre, notée μ , vérifie $|\mu| \leq (2\alpha - 1)^{-q} < 1$ car $|\lambda||\mu| = b^q \leq 1$. On démontre plus généralement que X est hyperbolique. \square

Un bon exercice est de dessiner l'image de $[-M, M]^2$ par f et d'essayer de comprendre ce qui se passe.

5.4 Automorphismes hyperboliques du tore

On va voir comment construire une partition de Markov pour les automorphismes hyperboliques du tore \mathbf{T}^r . Commençons par l'exemple classique de l'automorphisme \hat{A} de \mathbf{T}^2 , défini par l'automorphisme linéaire A dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, l'espace vectoriel stable est la droite E^s d'équation $y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}x$, l'espace vectoriel instable est la droite E^u d'équation $y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}x$. Les ensembles stables et instables d'un point $z \in \mathbf{R}^2$ sont les espaces affines correspondant $z + E^s$ et $z + E^u$.

On se donne deux rectangles R_1 et R_2 de \mathbf{R}^2 dont les côtés sont formés d'ensembles stables et instables. Les segments stables de R_1 sont inclus dans E^s et $(1, 1) + E^s$, les segments instables dans E^u et $(1, 0) + E^u$. Les segments stables de R_2 sont inclus dans $(0, 1) + E^s$ et $(1, 1) + E^s$, les segments instables dans E^u et $(1, 1) + E^u$. La projection $\pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$ est injective sur R_2 mais pas sur R_1 . Cependant, elle est injective sur la réunion des deux intérieurs. Les images de R_1 et R_2 sont des parties fermées d'intérieur vide qui recouvrent le tore. Les sommets se projettent en quatre points distincts.

Puisque A^{-1} envoie $(0, 0)$ sur $(0, 0)$, $(1, 0)$ sur $(1, -1)$, $(0, 1)$ sur $(-1, 2)$ et $(1, 1)$ sur $(0, 1)$, on peut dessiner $A^{-1}(R_1)$ et $A^{-1}(R_2)$. On va construire notre décomposition $(\hat{S}_i)_{1 \leq i \leq 5}$ en gardant les cinq rectangles naturellement définis par les ensembles $\hat{R}_i \cap \hat{A}^{-1}(\hat{R}_j)$. Chaque \hat{S}_i est homéomorphe à S_i par π où:

- les côtés de $S_1 = R_1 \cap A^{-1}(R_1)$ sont inclus dans E^s , $(0, 1) + E^s$, E^u , $(1, 0) + E^u$;
- les côtés de $S_2 = ((0, -1) + R_1) \cap A^{-1}(R_1)$ sont inclus dans E^s , $(0, 1) + E^s$, $(0, -1) + E^u$, $(1, -1) + E^u$;
- les côtés de $S_3 = ((-1, 0) + R_1) \cap A^{-1}(R_2)$ sont inclus dans $(-1, 2) + E^s$, $(0, 1) + E^s$, E^u , $(-1, 0) + E^u$;
- les côtés de $S_4 = (0, -1) + R_2) \cap A^{-1}(R_1)$ sont inclus dans E^s , $(0, 1) + E^s$, $(1, 0) + E^u$, $(0, -1) + E^u$;
- les côtés de $S_5 = (-1, 0) + R_2) \cap A^{-1}(R_2)$ sont inclus dans $(-1, 2) + E^s$, $(0, 1) + E^s$, $(0, 1) + E^u$, $(-1, 0) + E^u$.

Dans le cas où $\hat{A}(\text{Int}(\hat{S}_i)) \cap \text{Int}(\hat{S}_j) \neq \emptyset$, cet ensemble est l'intérieur d'un sous-rectangle $\hat{\Delta}_{i,j}$ de \hat{S}_j qui joint les deux côtés stables de \hat{S}_j . Dans ce cas, $\hat{\Delta}'_{i,j} = \hat{A}^{-1}(\hat{\Delta}_{i,j})$ est un sous-rectangle

de \widehat{S}_i qui joint les deux côtés instables de \widehat{S}_i . On pose $M_{i,j} = 1$ dans ce cas et $M_{i,j} = 0$ sinon. Remarquons que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons le sous-décalage σ_M sur $Z_M \subset \{1, \dots, 5\}^{\mathbf{Z}}$. Pour toute suite $\mathbf{i} = (i_k)_{k \in \mathbf{Z}} \in Z_M$ il existe un unique point $z = h(\mathbf{i})$ tel que $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{A}^{-k}(\Delta'_{i_k, i_{k+1}}) = \{z\}$. L'application h définit une semi-conjugaison entre σ_M et \widehat{A} . Remarquons que si z a plus d'un antécédent, son orbite rencontre l'un des côtés de \widehat{S}_i . Ceci implique que $z \in W^s(0)$ ou $z \in W^u(0)$. Remarquons également que les antécédents de 0 sont les trois points fixes de σ_M .

Notre décomposition n'est pas vraiment une décomposition de Markov, car $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{A}^{-k}(\widehat{S}_i)$ peut contenir plus d'un point (considérer la suite de période 2 formée de 1 et de 2). En fait on peut construire une vraie partition de Markov avec de tels rectangles (mais il en faut plus). Cependant la semi-conjugaison donnée par notre décomposition peut nous permettre de déduire des propriétés dynamiques de \widehat{A} .

Remarquons que

$$\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 = |\det(A^n - \text{Id})| = \#\text{Fix}(\widehat{A}^n) = \#\text{Fix}(\sigma_M^n) - 2 = \text{Tr}(M^n) - 2.$$

On peut vérifier que M is irréductible et apériodique, on sait donc que

$$h(\sigma_M) = \log \rho(M) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\#\text{Fix}(\sigma_M^n)) = \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right),$$

et par conséquent que

$$h(\widehat{A}) \leq h(\sigma_M) = \ln \rho(A).$$

Expliquons pourquoi on a une égalité. Considérons une métrique $\|\cdot\|$ adaptée à la décomposition hyperbolique de A . Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbf{R}^2$ l'application π est injective sur toute boule $B(z, \varepsilon_0)$ (qui est un rectangle !) et induit une isométrie locale. Notons $\lambda = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Cela implique que pour tous points \widehat{z} et \widehat{z}' dans \mathbf{T}^2

$$\max_{-1 \leq i \leq 1} d(\widehat{A}^i(\widehat{z}), \widehat{A}^i(\widehat{z}')) \leq \varepsilon_0 \Rightarrow \max_{i \in \{-1, 1\}} d(\widehat{A}^i(\widehat{z}), \widehat{A}^i(\widehat{z}')) \geq \lambda d(\widehat{z}, \widehat{z}').$$

On en déduit immédiatement que $\text{Fix}(\widehat{A}^n)$ est (n, ε_0) -séparé, ce qui implique que

$$h(\widehat{A}) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\#\text{Fix}(\widehat{A}^n)) = \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

L'argument précédent nous dit que \widehat{A} est expansif : il existe ε_0 tel que pour tous points distincts x and y , il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $d(T^k(x), T^k(y)) \geq \varepsilon_0$. Cet argument peut être généralisé à tout automorphisme \widehat{A} hyperbolique du tore \mathbf{T}^r . Remarquons que pour un tel automorphisme, on a

$$h(\widehat{A}) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\#\text{Fix}(\widehat{A}^n)) = \sum_{1 \leq i \leq s} \ln(|\lambda_i|)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont les valeurs propres de module > 1 . Pour montrer l'inégalité inverse, il suffit de construire une partition de Markov de $\mathbf{T}^r = \bigcup_{1 \leq i \leq p} \widehat{S}_i$ par des rectangles à "côtés" dans les espaces stables et instables et vérifiant des propriétés similaires à celles qu'on a vu plus haut et tel que le sous-décalage de type fini σ_M sur $Z_M \subset \{1, \dots, p\}^{\mathbf{Z}}$ défini par la partition de Markov vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\#\text{Fix}(\sigma_M^n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\#\text{Fix}(\widehat{A}^n))$$

car

$$h(\sigma_M) = \ln \rho(M) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\#\text{Fix}(\sigma_M^n)).$$

Ceci sera vrai si le nombre d'antécédents d'un point $\widehat{z} \in \mathbf{T}^r$ est borné. Ce sera le cas si les rectangles sont choisis assez petits pour définir une vraie partition de Markov. En fait on a

PROPOSITION 5.4.1 : *Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut construire une telle famille avec des rectangles de diamètre $\leq \varepsilon$.*

Ceci implique

CORROLAIRE 5.4.2 : *Soit \widehat{A} un automorphisme hyperbolique de \mathbf{T}^r . Alors*

$$h(\widehat{A}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\#\text{Fix}(\widehat{A}^n)) = \sum_{1 \leq i \leq s} \ln(|\lambda_i|)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont les valeurs propres de module > 1 .

5.5 Intersections homoclines

On obtient des ensembles hyperboliques non triviaux dès qu'on a un point fixe (ou périodique) de type selle dont les variétés stables et instables ont une intersection transverse. Plus précisément soit x_0 un point périodique de type selle. Un *point d'intersection homocline* x_1 est un point appartenant à $W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$ distinct de x_0 . Si les espaces tangents à $W^s(x_0)$ et à $W^u(x_0)$ en x_1 sont supplémentaires, on dit que l'intersection est *transverse*. Le théorème qui suit affirme qu'il existe des fers à cheval similaires à celui construit dans l'application de Hénon, dès qu'un point périodique de type selle a une intersection homocline transverse.

THÉORÈME 5.5.1 : *Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 d'une variété M et x_0 un point périodique de type selle admettant un point d'intersection homocline transverse x_1 . Pour tout voisinage U de x_0 , il existe un entier N et une partie compacte X , invariante par f^N et hyperbolique, contenant un itéré de x_1 , qui est de type fer à cheval : la restriction $f^N|_X$ est conjuguée au décalage de Bernouilli sur $\{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$ via une partition de Markov.*

On en déduit alors immédiatement les corollaires suivants :

CORROLAIRE 5.5.2 : *Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 d'une variété M et x_0 un point périodique de type selle admettant un point d'intersection homocline transverse x_1 . Alors x_1 appartient à l'adhérence de l'ensemble des points périodiques de f .*

CORROLAIRE 4.5.3 : *Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 d'une variété compacte M et x_0 un point périodique de type selle admettant un point d'intersection homocline transverse. Alors on a $h(f) > 0$.*

On peut construire sur des variétés de dimension ≥ 3 des difféomorphismes sans point périodique dont l'entropie topologique est strictement positive. Il suffit de prendre un difféomorphisme f d'une variété compacte M dont l'entropie est non nulle (un automorphisme linéaire hyperbolique de \mathbf{T}^2 par exemple) puis de faire le produit, sur $M \times \mathbf{T}^1$, de f et d'une rotation d'angle irrationnel. Par une construction due à M. Rees, on peut également trouver un homéomorphisme minimal de \mathbf{T}^2 dont l'entropie est non nulle. Cependant, le théorème suivant, dû à A. Katok, nous dit que ce type d'exemple est impossible sur une surface dès que la différentiabilité est assez grande. Rappelons qu'un difféomorphisme f est de classe $C^{1+\varepsilon}$ si f est un difféomorphisme de classe C^1 et si Df est hölderienne de rapport ε (c'est le cas par exemple si f est un difféomorphisme de classe C^2).

THÉORÈME 5.5.4 : *Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe $C^{1+\varepsilon}$ d'une surface compacte M . Si $h(f) > 0$, alors il existe un point périodique de type selle admettant un point d'intersection transverse.*

Chapitre 1

Exercice 1

Soit X un espace compact métrisable et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications continues non identiquement nulles, dense dans $C(X, \mathbf{C})$. Pour tout L et L' dans $C(X, \mathbf{C})^*$ on pose

$$d(L, L') = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|L(f_n) - L'(f_n)|}{2^n \|f_n\|},$$

où $\|f_n\| = \sup_{x \in X} |f_n(x)|$.

- 1) Expliquer pourquoi d est une distance sur $C(X, \mathbf{C})^*$ et pourquoi la topologie induite est la topologie faible*
- 2) Prouver que la boule unité $\{L \in C(X, \mathbf{C})^* \mid \|L\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible*.

Exercice 2

Soit $T : X \rightarrow X$ une application continue sur un espace métrisable compact X . Nous allons prouver l'existence d'une mesure borélienne de probabilité invariante ergodique, c'est-à-dire d'un point extrémal de $M_T(X)$. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications continues, dense dans $C(X, \mathbf{C})$.

- 1) Expliquer pourquoi

$$M_0 = \left\{ \mu \in M_T(X) \mid \int f_0 d\mu = \sup_{\mu' \in M_T(X)} \int f_0 d\mu' \right\},$$

est une partie compacte convexe non vide de $M_T(X)$.

- 2) On définit alors une suite $(M_n)_{n \geq 0}$ de partie de $M_T(X)$ par la relation de récurrence :

$$M_{n+1} = \left\{ \mu \in M_n \mid \int f_{n+1} d\mu = \sup_{\mu' \in M_n} \int f_{n+1} d\mu' \right\}.$$

- 3) Montrer que $\bigcap_{n \geq 0} M_n$ est réduit à un point $\{\mu\}$ et que μ est extrémal.

Exercice 3

Soit (X, d) un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. On rappelle que \mathcal{M}_T désigne l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité invariantes et $C(X, \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues $f : X \rightarrow \mathbf{R}$. On dira que $f \in C(X, \mathbf{R})$ est un *cobord* s'il existe $h \in C(X, \mathbf{R})$ tel que $f = h \circ T - h$. On dira que $f \in C(X, \mathbf{R})$ et $g \in C(X, \mathbf{R})$ sont *cohomologues* si $f - g$ est un cobord. Dans ce cas, on écrira $f \sim g$.

- 1) Expliquer pourquoi \sim est une relation d'équivalence sur $C(X, \mathbf{R})$ et montrer que $\int f d\mu = \int g d\mu$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_T$ si $f \sim g$.

- 2) Soit $f \in C(X, \mathbf{R})$ et $n \geq 1$. Montrer que $f \sim S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$.

3) En déduire que $f \in C(X, \mathbf{R})$ est cohomologue à une fonction strictement positive $g \in C(X, \mathbf{R})$ si et seulement si $\int f d\mu > 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_T$.

4) Montrer que $f \in C(X, \mathbf{R})$ est une limite uniforme de cobords si et seulement si $\int f d\mu = 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_T$.

Exercice 4

Soit X un espace topologique compact. Montrer qu'un homéomorphisme de X est minimal si et seulement s'il est positivement minimal.

Exercice 5

Soit X un espace topologique compact. Montrer qu'une application continue $T : X \rightarrow X$ est positivement minimale si et seulement si, pour toute partie ouverte non vide V , il existe $N \geq 0$ tel que $\bigcup_{0 \leq n \leq N} T^{-n}(V) = X$.

Exercice 6

Montrer que si T est un homéomorphisme d'un espace topologique compact, il existe un point qui est positivement et négativement récurrent.

Exercice 7

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme positivement minimal sur un espace localement compact et non compact (Théorème de Gottschalk). Soit $T : X \rightarrow X$ un homéomorphisme positivement minimal sur un espace localement compact et U une partie ouverte relativement compacte.

- 1) Expliquer pourquoi $X = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U)$.
- 2) Expliquer pourquoi il existe $N \geq 1$ tel que $\bar{U} \subset \bigcup_{0 \leq n \leq N} T^{-n}(U)$
- 3) En déduire que $\bigcup_{n \geq 0} T^n(\bar{U}) = \bigcup_{0 \leq n \leq N} T^n(\bar{U})$.
- 4) Montrer que X est compact.

Exercice 8

Soit (X, T) un système dynamique topologique, où (X, d) est un espace métrique compact. On dira que $x \in X$ est *presque-périodique* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ et une suite $(n_k)_{k \geq 0}$ dans \mathbf{N} telle que $d(T^{n_k}(x), x) < \varepsilon$ et $0 < n_{k+1} - n_k \leq N$.

- 1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - le point x est presque périodique,
 - le point x est contenu dans une partie positivement minimale,
 - l'adhérence de l'orbite positive $O^+(x)$ est une partie minimale.
- 2) Donner l'exemple d'un système dynamique et d'un point récurrent qui n'est pas presque périodique. De même, donner l'exemple d'un système dynamique et d'un point presque périodique qui n'est pas périodique.

Exercice 9

(*Théorème de Gottshalk-Hedlund*) Soit T un homéomorphisme minimal d'un espace topologique compact X . On se donne une application continue $\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$ et on définit pour tout $n \geq 1$, l'application $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ T^i$. On veut prouver que les propriétés suivantes sont équivalentes

- i)** pour tout $x \in X$, la suite $(\varphi_n(x))_{n \geq 0}$ est bornée ;
- ii)** il existe $x_0 \in X$ tel que la suite $(\varphi_n(x_0))_{n \geq 0}$ est bornée ;
- iii)** il existe une fonction continue $\psi : X \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\varphi = \psi \circ T - \psi$.

On va commencer par prouver que **ii)** implique **iii)**. On suppose que **ii)** est vérifiée et on définit

$$F : X \times \mathbf{R} \rightarrow X \times \mathbf{R}$$

$$(x, y) \mapsto (T(x), y + \varphi(x))$$

- 1)** Montrer que F est un homéomorphisme qui commute avec

$$G_a : X \times \mathbf{R} \rightarrow X \times \mathbf{R}$$

$$(x, y) \mapsto (x, y + a)$$

- 2)** Montrer que l'ensemble ω -limite de $z_0 = (x_0, 0)$ (pour F) est une partie compacte non vide qui contient un ensemble invariant minimal compact Z_0 .

- 3)** En utilisant **1)**, montrer que la projection

$$p_1 : X \times \mathbf{R} \rightarrow X$$

$$(x, y) \mapsto x$$

est injective sur Z_0 .

- 4)** Expliquer pourquoi la projection de Z_0 par p_1 est X .
- 5)** Montrer que **iii)** est vérifiée.
- 6)** Montrer l'équivalence entre **i)**, **ii)** et **iii)**.

Chapitre 2

Exercice 1

Montrer que l'entropie topologique d'un homéomorphisme de $[0, 1]$ est nulle.

Exercice 2

Donner un exemple d'homéomorphisme $T : X \rightarrow X$ d'un espace compact dont l'entropie topologique est infinie.

Exercice 3

Soient $T_1 : X_1 \rightarrow X_1$ et $T_2 : X_2 \rightarrow X_2$ deux applications définies sur des espaces métriques compacts. Montrer que l'entropie de l'application produit

$$\begin{aligned} T_1 \times T_2 : X_1 \times X_2 &\rightarrow X_1 \times X_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (T_1(x_1), T_2(x_2)) \end{aligned}$$

vérifie $h(T_1 \times T_2) = h(T_1) + h(T_2)$.

Exercice 4

Quelle est l'entropie de $T : z \mapsto z^2$ définie sur la sphère de Riemann.

Exercice 5

Soit $T : X \rightarrow X$ une application continue définie sur un espace topologique compact. On rappelle que x est non errant si pour tout voisinage U de x , il existe $n \geq 1$ tel que $T^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$.

- 1) Montrer que l'ensemble $\Omega(T)$ des points non errants est fermé et vérifie $T(\Omega(T)) \subset \Omega(T)$.
- 2) On suppose que $\Omega(T)$ est fini. Montrer que $h(T) = 0$ (on cherchera d'abord une famille génératrice pertinente de recouvrements).
- 3) Plus généralement, montrer que $h(T) = h(T|_{\Omega(T)})$.
- 4) À l'aide du principe variationnel, donner une preuve simple des résultats précédents dans le cas où X est métrisable.

Exercice 6

Soit $T : X \rightarrow X$ une application continue définie sur un espace topologique compact. On suppose qu'il existe une famille finie $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ de parties fermées positivement invariantes (i.e. $T(X_i) \subset X_i$), telles que $X = \bigcup_{1 \leq i \leq p} X_i$. Montrer que $h(T) = \sup_{1 \leq i \leq p} h(T|_{X_i})$. On pourra commencer par le cas où X est métrisable.

Exercice 7

On se donne une application continue sur un espace topologique compact métrisable $T : X \rightarrow X$.

- 1) On fixe dans cette question μ, ν dans \mathcal{M}_T et $t \in [0, 1]$. Montrer que pour toute partition borélienne $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$, on a :

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}) \leq tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) - t \ln t - (1-t) \ln(1-t).$$

En déduire que

$$H_{t\mu+(1-t)\nu}(T, \mathcal{P}) = tH_\mu(T, \mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(T, \mathcal{P}),$$

puis que

$$h_{t\mu+(1-t)\nu}(T) = th_\mu(T) + (1-t)h_\nu(T).$$

- 2) On suppose qu'il existe une unique mesure $\mu \in \mathcal{M}_T$ telle que $h_\mu(T) = h(T)$. Montrer que μ est ergodique.
- 3) On suppose que $h(T) = +\infty$. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}_T$ telle que $h_\mu(T) = h(T)$.
- 4) Donner un exemple où $h(T) = +\infty$ et où il n'existe aucune mesure ergodique μ telle que $h_\mu(T) = h(T)$.

Exercice 8

Soit $\alpha \in \mathbf{T}^1$. Calculer l'entropie topologique de

$$F : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, y + \alpha)$$

Exercice 9

Soit $T : X \rightarrow X$ une application lipschitzienne sur un espace métrique compact. L'entropie peut-elle être infinie ? et sur une variété différentiable compacte ?

Exercice 10

Soit $T : X \rightarrow X$ une application continue définie sur un espace métrique compact. Rappelons que T est (positivement) expansive s'il existe $\delta > 0$ tels que pour tous x et y , il existe $n \geq 0$ tel que $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \delta$.

- 1) Donner des exemples d'applications qui sont expansives et d'applications qui ne le sont pas.
- 2) Montrer que si X est compact, la propriété d'expansivité est topologique (elle ne dépend pas de la métrique mais de la topologie).

Exercice 11

Soit $T : X \rightarrow X$ une application continue définie sur un espace métrique compact. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- T est expansive;
- il existe un recouvrement générateur;
- si $\varepsilon > 0$ est assez petit, le recouvrement \mathcal{U}^ε par boules de rayon ε est générateur.

Exercice 12

L'entropie d'une application continue expansive $T : X \rightarrow X$ sur un espace métrique compact peut-elle être infinie ?

Exercice 13

Soit $T : X \rightarrow X$ une application continue expansive $T : X \rightarrow X$ sur un espace métrique compact.

- 1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\text{Fix}(T^n)$ est fini.
- 2) Montrer que $h(T) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\#\text{Fix}(T^n))$.

Exercice 14

Soit $T : X \rightarrow X$ un homéomorphisme d'un espace métrique compact. Montrer que si T est (positivement) expansif, alors X est fini.

Exercice 15

Soit $T : X \rightarrow X$ un homéomorphisme défini sur un espace métrique compact. Rappelons que T est expansif s'il existe $\delta > 0$ tels que pour tous x et y , il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $d(T^k(x), T^k(y)) \geq \delta$.

- 1) Donner des exemples d'applications qui sont expansives et d'applications qui ne le sont pas.
- 2) Montrer que T est expansif si et seulement si la suite $(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i(\mathcal{U}_\varepsilon))_{n \geq 0}$ est génératrice si $\varepsilon > 0$ est assez petit, et que $h(T) < +\infty$.
- 3) Là-encore, montrer que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\text{Fix}(T^n)$ est fini et que $h(T) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\#\text{Fix}(T^n))$.

Exercice 16

Prouver que la mesure de Lebesgue est la seule mesure borélienne de probabilité invariante par $T : \hat{x} \mapsto p\hat{x}$ sur \mathbf{T}^1 , telle que $h_\mu(T) = h(T)$, si $p \geq 2$.

Chapitre 3

Exercice 1

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et le sous-décalage de type fini σ_A défini sur $X_A \subset \{1, 2, 3\}^{\mathbf{Z}}$.

- 1) Calculer le nombre de points périodiques de période q , pour $q \leq 3$. Quel est le nombre de points fixes de σ_A^n , pour $n \geq 1$?
- 2) Quelle est l'entropie topologique de σ_A ?
- 3) Peut-on trouver une partie fermée invariante $X \subset X_A$ telle que la restriction $\sigma_A|_X$ soit conjuguée au décalage de Bernoulli sur $\{1, 2\}^{\mathbf{Z}}$?
- 4) On considère la matrice stochastique suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expliquer pourquoi il existe sur $\{1, 2, 3\}^{\mathbf{Z}}$ une unique mesure de Markov associée μ et calculer $\mu(C)$, où

$$C = \{(x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in \{1, 2, 3\}^{\mathbf{Z}} \mid x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2\}.$$

La mesure μ est-elle supportée sur X_A ? que vaut l'entropie $h_\mu(\sigma_A)$?

- 5) Soit ν la mesure de Parry de σ_A . Calculer $\nu(C)$ et donner la valeur de l'entropie $h_\nu(\sigma_A)$.

Chapitre 4

Exercice 1

On dira qu'une transformation continue $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ relève une transformation continue $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ si pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $F(x + \mathbf{Z}) = f(x) + \mathbf{Z}$.

- 1) Montrer que si f relève F , les autres applications qui relèvent F vérifient $f = g + k$, où k est un entier.
- 2) Montrer qu'il existe un entier p tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x + 1) = f(x) + p$. Cet entier s'appelle le *degré* de F .
- 3) Montrer que F a au moins $p - 1$ points fixes.
- 4) En déduire une minoration de

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\#\text{Fix}(F^n))}{n},$$

où $\#\text{Fix}(F^n)$ est le nombre de points fixes de F^n .

- 5) Dans le cas où f est dérivable et vérifie $f'(x) > 1$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, calculer $\#\text{Fix}(F^n)$.
- 6) On note \mathcal{E} l'ensemble des applications continues $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $h(x + 1) = h(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $h \in \mathcal{E}$ on définit une application $\Phi(h) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par :

$$\Phi(h)(x) = \frac{1}{p}h(f(x)).$$

Montrer que $\Phi(h)$ appartient à \mathcal{E} , puis que $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ a un unique point fixe h_0 . Expliquer pourquoi h_0 relève une application continue $H_0 : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ de degré 1, puis prouver que H_0 est une semi-conjugaison entre F et l'endomorphisme linéaire $\widehat{F}_* : \widehat{x} \rightarrow p\widehat{x}$.

- 7) On garde les hypothèses de la question précédente mais on suppose de plus que f est de classe C^1 et que $f'(x) > 1$, pour tout $x \in \mathbf{R}$. On note \mathcal{E}' l'ensemble des applications $h \in \mathcal{E}$ qui sont croissantes. Pour tout $h \in \mathcal{E}'$ on définit une application $\Psi(h) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par :

$$\Psi(h)(x) = f^{-1}(h(px)).$$

Prouvez que $\Psi(h)$ appartient à \mathcal{E}' et que l'application $\Psi : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}'$ a un unique point fixe h_1 . Expliquer pourquoi h_1 est injective et relève un homéomorphisme $H_1 : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ de degré 1. Montrez que F et \widehat{F}_* sont conjugués.

Exercice 2

Montrer qu'un automorphisme linéaire du tore \mathbf{T}^r est expansif si et seulement s'il est hyperbolique.

Exercice 3

1) Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant 1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $|\text{Tr}(A)| > 2$;
- A est hyperbolique ;
- \hat{A} est mélangeante (pour la mesure de Haar).

2) Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant -1 . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $|\text{Tr}(A)| \neq 0$;
- A est hyperbolique ;
- \hat{A} est mélangeante (pour la mesure de Haar).

3) Trouver une matrice carrée d'ordre 4 à coefficients entiers de déterminant 1 telle que

- A n'est pas hyperbolique ;
- \hat{A} est mélangeante (pour la mesure de Haar).

(On commencera par montrer que les racines de $P(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$ ne sont pas racines de l'unité).

Exercice 4

Donner un argument dynamique au fait que les valeurs propres d'une matrice carrée hyperbolique d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant 1 sont irrationnelles.

Exercice 5

Soit $F : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$ un homéomorphisme tel que F_* soit un automorphisme hyperbolique de \mathbf{R}^r . On va donner une autre preuve du fait qu'il existe une unique application continue $H : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{T}^r$ homotope à l'identité telle que $H \circ F = \hat{F}_* \circ H$.

1) Soit f un relèvement de F . Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^r$, il existe un unique point $y = h(x) \in \mathbf{R}^r$ tel que la suite $(f^k(x) - F_*^k(y))_{k \in \mathbf{Z}}$ est bornée et que de plus on a $\|f^k(x) - F_*^k(y)\| \leq M$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

2) Montrer que $h \circ f = F_* \circ h$ et que $h - \text{Id}_{\mathbf{R}^r}$ est invariante par les translations entières.

3) Montrer que h est continue.

4) Conclure

Exercice 6

Soit \hat{A} un automorphisme hyperbolique de \mathbf{T}^r . Prouver le lemme de fermeture suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute δ -pseudo-orbite $(x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de période q peut être ε -pistée par une orbite périodique $(y_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de période q .

Exercice 7

On notera $\text{GL}(2, \mathbf{Z})$ (resp. $\text{SL}(2, \mathbf{Z})$) le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant ± 1 (resp. 1). Par abus de langage on identifiera une matrice de $\text{GL}(2, \mathbf{Z})$ à l'automorphisme linéaire $A : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ représenté par cette matrice dans la base canonique ; on notera alors \hat{A} l'automorphisme de $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ naturellement défini par A . On écrira $\text{GL}_{\text{hyp}}(2, \mathbf{Z})$ pour l'ensemble des automorphismes $A \in \text{GL}(2, \mathbf{Z})$ qui sont hyperboliques et on posera $\text{SL}_{\text{hyp}}(2, \mathbf{Z}) = \text{GL}_{\text{hyp}}(2, \mathbf{Z}) \cap \text{SL}(2, \mathbf{Z})$.

On notera $\text{Homeo}(\mathbf{T}^2)$ le groupe des homéomorphismes de \mathbf{T}^2 . On écrira alors $\text{Homeo}_+(\mathbf{T}^2)$ pour le sous-groupe formé des homéomorphismes de degré 1 et $\text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ pour le sous-groupe formé des homéomorphismes homotopes à l'identité.

Si G est un groupe, on dira que $g' \in G$ est une *racine* de $g \in G$, s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $(g')^n = g$. On rappelle que le *centralisateur* d'un élément $g \in G$ est le sous-groupe $\text{Cent}_G(g)$ des éléments $g' \in G$ tels que $gg' = g'g$.

1.a) On définit l'ensemble Λ_0 (resp. Λ_1) des valeurs propres d'automorphismes $A \in \text{GL}_{\text{hyp}}(2, \mathbf{Z})$ (resp. $A \in \text{SL}_{\text{hyp}}(2, \mathbf{Z})$). Montrer que les ensembles $\Lambda_0 \cup \{-1, 1\}$ et $\Lambda_1 \cup \{-1, 1\}$ sont des parties discrètes de \mathbf{R} puis calculer

$$\lambda_0 = \min(\Lambda_0 \cap]1, +\infty[), \quad \lambda_1 = \min(\Lambda_1 \cap]1, +\infty[).$$

1.b) En déduire que le centralisateur d'un automorphisme $A \in \text{GL}_{\text{hyp}}(2, \mathbf{Z})$ (resp. $A \in \text{SL}_{\text{hyp}}(2, \mathbf{Z})$) dans $\text{GL}(2, \mathbf{Z})$ (resp. $\text{SL}(2, \mathbf{Z})$) est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

1.c) On considère les automorphismes linéaires

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer deux éléments qui engendrent $\text{Cent}_{\text{GL}(2, \mathbf{Z})}(A_0)$. Même question pour $\text{Cent}_{\text{GL}(2, \mathbf{Z})}(A_1)$ et $\text{Cent}_{\text{SL}(2, \mathbf{Z})}(A_1)$.

2.a) On note \widehat{A}_0 et \widehat{A}_1 les automorphismes de \mathbf{T}^2 définis respectivement par A_0 et A_1 . Montrer que \widehat{A}_0 a un unique point fixe. En déduire que tout élément $G \in \text{Cent}_{\text{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_1) \cap \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ a un relèvement à \mathbf{R}^2 qui commute avec A_0 . Montrer que $\text{Cent}_{\text{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_0) \cap \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ se réduit à l'identité. Prouver un résultat analogue pour $\text{Cent}_{\text{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_1) \cap \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$

2.b) En déduire ce que sont les groupes $\text{Cent}_{\text{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_0)$, $\text{Cent}_{\text{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_1)$ et $\text{Cent}_{\text{Homeo}(\mathbf{T}^2)}(\widehat{A}_1)$?

2.c) Quelles sont les racines de \widehat{A}_0 dans $\text{Homeo}(\mathbf{T}^2)$? Quelles sont les racines de \widehat{A}_1 dans $\text{Homeo}(\mathbf{T}^2)$? et dans $\text{Homeo}_+(\mathbf{T}^2)$?

Chapitre 5

Exercice 1

Soit (X, d) un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue (positivement) expansive. On suppose qu'il existe un sous-décalage de type fini σ_A irréductible apériodique défini sur $X_A \subset \{1, \dots, p\}^{\mathbf{N}}$, une application continue surjective $H : X_A \rightarrow X$ telle que $T \circ H = H \circ \sigma_A$ et un entier M tel que, tout élément x de X a au plus M antécédents par H . Montrer que l'entropie topologique de T est égale à l'entropie topologique de σ_A .

Exercice 2

Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on définit $g_\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ par

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x + \gamma & \text{si } x \in [0, \gamma], \\ \beta(1 - x) & \text{si } x \in [\gamma, 1], \end{cases}$$

où $\beta = 1 + \frac{1}{\alpha}$ et $\gamma = \frac{1}{1 + \alpha}$.

- 1) Dessiner le graphe de g_α et expliquer pourquoi $\{[0, \gamma], [\gamma, 1]\}$ est une partition de Markov qui définit une semi-conjugaison $h_\alpha : \{0, 1\}^{\mathbf{N}} \rightarrow [0, 1]$ d'un sous-décalage de type fini sur g_α .
- 2) Calculer l'entropie de g_α .

Exercice 3

On définit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{4}{3}x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, 1]. \end{cases}$$

- 1) Dessiner le graphe de f et prouver que pour tout $n \geq 1$ il existe $a_n \in \mathbf{N}$ non multiple de 3 tel que $f^n(0) = \frac{a_n}{3^n}$.
- 2) Peut-on construire une partition de Markov (finie) ?

Exercice 4

- 1) Montrer que

$$h : x \mapsto \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

définit une conjugaison entre $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ où

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2], \\ 1 - 2x & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

et

$$g(x) = 4x(1 - x).$$

- 2) Constuire une partition de Markov pour g .
- 3) Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ Expliquer pourquoi il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que presque tout point x (pour la mesure de Lebesgue) vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(g^i(x)) = c.$$

Calculer ce nombre et prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\text{Fix}(g^n)} \sum_{x \in \text{Fix}(g^n)} \varphi(x) = c.$$