Sorbonne Université

Master de Sciences et Technologie
Mention Mathématiques et Applications

M2 de Mathématiques fondamentales

Année universitaire 2018–2019

Responsables : Ilia Itenberg et Benoît Stroh

Secrétariat : Mme L. Dreyfuss

Campus de Jussieu, 1er étage, couloir 15-25, bureau 1.09
4, place Jussieu, 75005 Paris

Tél & Fax : 01 44 27 85 45
Mél : master.math.fond@upmc.fr
Url : http://mathfond.math.upmc.fr/

Table des matières

1 Le M2 de Mathématiques fondamentales

La spécialité *Mathématiques fondamentales* est une option de la mention *Mathématiques et Applications* du *Master de Sciences et Technologie* de Sorbonne Université. Elle s'adresse aux étudiants titulaires d'un M1 de mathématiques ou d'un titre équivalent et comprend deux parcours : "Mathématiques Recherche" et "Mathématiques avancées".

Un large spectre des mathématiques fondamentales est généralement couvert, avec des variations selon les années : théorie des nombres, géométrie algébrique, théorie de Lie, topologie, géométries analytique et différentielle, systèmes dynamiques, analyse fonctionnelle, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles, etc.

Parcours "Mathématiques Recherche"

Ce parcours, assez exigeant, s'adresse à tous les étudiants se destinant à un doctorat en Mathématiques fondamentales. Une fois ce doctorat accompli, les débouchés naturels sont les métiers de la recherche et de l'enseignement supérieur, au CNRS, à l'université ou dans les centres de recherche des grandes entreprises. Ces diplômes devraient aussi être un gage de puissance et de créativité intellectuelles suffisant pour intéresser les entreprises de haute technologie, comme c'est déjà le cas pour des diplômes équivalents en Allemagne, au Royaume Uni et aux Etats-Unis.

Parcours "Mathématiques Avancées"

Ce parcours, plus abordable, intéressera les étudiants dont le but principal est de valider le Master, sans poursuivre en doctorat. Les cours proposés sont essentiellement les mêmes que pour le parcours "Recherche", mais les règles de validation sont assouplies, et il est aussi possible de valider certains cours de M1 avancés.

Les détails des règles permettant de valider l'un ou l'autre des parcours se trouvent sur la page "Organisation" de cette brochure.

2 Organisation et déroulement du M2

Comme tout M2, le cursus comprend des *cours* et un *stage*. Les règles de validation dépendent du parcours envisagé.

Les cours se répartissent en 4 périodes de 6 semaines, regroupées de la façon suivants :

- cours d'introduction de 24 heures sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours fondamentaux I et II, de 24 heures plus 12 heures de TD, sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours spécialisés, en général de 24h sur 6 semaines (9 ECTS chacun).

En règle générale, la validation de chaque cours est conditionnée par la réussite à un examen écrit qui se tient à la fin de l'enseignement concerné. Une session de rattrapage est organisée en juin. Pour les cours spécialisés, la validation peut prendre d'autres formes : examen oral, mini-mémoire de synthèse sur un thème connexe, etc.

Voici les règles de validation des deux parcours.

Parcours "Mathématiques Recherche"

Les cours (36 ECTS)

Les étudiants doivent valider 4x9=36 ECTS de cours, dont au plus 18 ECTS en cours introductifs et au moins 9 ECTS en cours fonda 2 ou spécialisé. Il est possible de valider des crédits de cours d'autres universités (Paris 7, Orsay...) après accord des responsables du M2, qui vérifieront notamment la cohérence du choix.

Le stage (21 ECTS)

Il consiste en un travail personnel de compréhension, d'explication et de synthèse d'un ou plusieurs articles de recherche, conclu par la rédaction d'un mémoire et une soutenance devant un jury. Le sujet du mémoire est bien souvent, mais pas nécessairement, un tremplin vers le futur sujet de thèse.

Il est conseillé de prospecter pour un directeur de stage potentiel dès que l'on est sûr de son sujet de prédilection. Fin mars semble être une limite raisonnable.

La date de soutenance du mémoire sera fixée en accord avec le directeur de recherche et les membres du jury. *Attention :* les étudiants qui désirent candidater à un **Contrat Doctoral** auprès de l'Ecole Doctorale devront avoir soutenu leur mémoire *avant fin juin*. Pour les autres, la limite ordinaire est *fin septembre*.

Les 3 ECTS d'ouverture

Ils consistent en l'apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Parcours “Mathématiques Avancées”

Les cours (36 ECTS)

Les étudiants doivent valider 36 ECTS sous la forme de cours. Outre les cours du M2, il est possible de valider certains cours du second semestre de M1, dont le niveau est intermédiaire entre M1 et M2. Il faudra pour cela demander l’accord d’un responsable qui s’assurera que

- le cours concerné n’a pas déjà été validé en M1,
- son contenu n’est pas inclus dans celui d’un cours de M2 déjà validé.

Par ailleurs, le nombre d’ECTS ainsi acquises est limité à 18.

Voici la liste des cours de M1 éligibles, dont on trouvera aussi une description sur la brochure générale du Master.

- Groupes et algèbres de Lie (6 ECTS)
- Topologie algébrique (6 ECTS)
- Introduction aux surfaces de Riemann (6 ECTS)
- Théorie analytique des équations différentielles ordinaires (6 ECTS)
- Équations aux dérivées partielles (12 ECTS)
- Histoire des mathématiques (6 ECTS)

Le stage (21 ECTS)

Il est similaire à celui du parcours Recherche. Le sujet du mémoire pourra cependant être plus adapté au projet de l’étudiant, notamment si celui-ci se destine à l’agrégation.

Les 3 ECTS d’ouverture

Ils consistent en l’apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Télé-enseignement

Une possibilité d’enseignement par correspondance est ouverte sur certains cours. Les étudiants par correspondance reçoivent ou téléchargent les polycopiés des cours, passent les examens à l’Université, et correspondent directement avec les enseignants (resp. leur directeur de stage) pour les questions pédagogiques (resp. la préparation de leur mémoire). Certains polycopiés sont disponibles sur les pages web des enseignants.

On consultera le site web du M2 pour des informations à jour concernant les cours disponibles par correspondance.

3 Inscription et candidature

L'inscription au master de Mathématiques fondamentales est réservée aux étudiants titulaires du M1, d'une maîtrise de mathématiques pures, ou d'un diplôme équivalent par décision individuelle d'équivalence du Président de l'Université.

En revanche, l'acceptation n'est pas automatique. Une sélection sera effectuée au vu des résultats obtenus dans les années antérieures. Voici les démarches pour candidater.

Inscription administrative par internet

Obligatoirement remplir un dossier d'inscription administrative via internet sur le site de la scolarité de l'université `http://www.upmc.fr/fr/formations/inscriptions_scolarite.html`. Si ce site est fermé, s'adresser au secrétariat.

Il sera demandé certains renseignements administratifs, après quoi il faudra imprimer le dossier ; de la persévérence peut s'avérer nécessaire ! Un numéro de dossier ainsi qu'un mot de passe vous seront alors attribués, qui permettront de suivre sur ce site l'évolution du statut de votre candidature.

Candidature

Ensuite, constituer un dossier de candidature et le remettre au secrétariat. *Demander au secrétariat la date limite de remise du dossier de candidature.*

Ce dossier doit comporter :

- le dossier d'inscription administrative imprimé
- le formulaire de candidature avec photo d'identité (téléchargeable sur le site internet)
- le relevé de notes de M1, délivré par son université d'origine.

Les étudiants ayant des diplômes étrangers doivent fournir en plus :

- la photocopie du programme des cours suivis pendant les quatre années d'études supérieures
- le relevé de notes des quatre années
- la photocopie des diplômes (le Service de la Scolarité en exigera ultérieurement une traduction assermentée ; voir par exemple le site des experts traducteurs `http://www.ceticap.com/`).

Résultats

Dans le cas d'une réponse favorable, l'étudiant recevra une lettre d'acceptation signée par le responsable du parcours. Dans tous les cas, l'avis de la commission sera consultable sur internet.

Bourses

Les étudiants désirant une bourse durant leur année de M2, doivent s'adresser au Bureau des bourses de l'université (campus de Jussieu). Il existe entre autres

- des bourses sur critère universitaire,
- des bourses sur critère social,
- des allocations d'études.

Voir les détails ainsi que les conditions d'attribution (de nationalité, de situation familiale, etc.) sur le site du bureau des bourses `http://www.upmc.fr/fr/vie_des_campus/bourses.html`.

Pour les deux premiers types de bourses ci-dessus il faut déposer une demande entre le 15 janvier et le 30 avril.

Par ailleurs, la Fondation Sciences Mathématiques de Paris offre des bourses d'études à travers son programme "Paris Graduate School of Mathematical Sciences". Consulter `http://www.sciencesmath-paris.fr/pgsm/`.

4 Cours de l'année 2018-2019

Chaque cours a un volume de 24h, sur 6 semaines. Les cours fondamentaux sont doublés par 12h de TD, qui sont assurés par l'auteur du cours (sauf mention du contraire)

Cours introductifs (10 septembre – 19 octobre 2018)

D. Cordero-Erausquin	Inégalités *	HFE, Com
I. Itenberg	Introduction à la géométrie algébrique	GA, GC
M. Maculan	Introduction aux surfaces de Riemann	GC, GT, GC, TN
J. Marché	Géométrie différentielle et riemanienne	GT

Les cours introductifs suivants du master de mathématiques de Paris 7 complètent bien notre parcours : Algèbres de Lie semi-simples et leurs représentations I, Représentations des groupes finis et invariants tensoriels, Combinatoire I, Théorie du corps de classe I.

Cours fondamentaux I (5 novembre – 14 décembre 2018)

L. Charles	Géométrie complexe et théorie de Hodge	GC, GA, GT
P. Charollois	Introduction aux formes modulaires *	TN
Y. Coudène	Systèmes dynamiques I *	Dyn
J.F. Dat	Introduction à l'arithmétique des courbes elliptiques	GA, GT
F. Loeser	Introduction aux schémas I	GA
A. Oancea	Topologie algébrique *	GA, GC, GT, Lie

Les cours fondamental I suivants du master de mathématiques de Paris 7 complètent bien notre parcours : Algèbres de Lie semi-simples et leurs représentations II, Combinatoire II, Théorie du corps de classe II, Introduction à la théorie analytique des nombres.

Cours fondamentaux II (7 janvier – 15 février 2019)

A. Ducros	Théorie de l'intersection	GA
G. Ginot (P13)	Introduction à l'homotopie *	GT, GA
A. Guilloux	Variétes des caractères et structures hyperboliques en dimension 3 *	GT, Lie
P. Le Calvez	Systèmes dynamiques II *	Dyn
F. Loeser	Introduction aux schémas II	GA
A. Padrol	Combinatoire des polytopes	Com

Les cours fondamental II suivants du master de mathématiques de Paris 7 complètent bien notre parcours : Courbe adélique et géométrie d'Arakelov birationnelle I, Méthode de Nash-Moser et EDP non-linéaires.

Cours spécialisés (4 mars – 12 avril 2019)

O. Amini (École Polytechnique)	Géométrie algébrique des objets combinatoires	GA, TN, Com
Y. André	Introduction à la théorie perfectoïde et ses applications en algèbre commutative	GA, TN
A. Erschler (ENS)	Marches aléatoires sur les groupes	GT, Dyn, HFE, Pro
O. Friedland et H. Ueberschar	Matrices aléatoires et leurs applications	HFE, Phys
S. Seyfaddini	Géométrie symplectique	GT, Dyn
N. Tholozan (ENS)	Déformations de groupes discrets dans les groupes de Lie *	GT, Lie, Dyn

Les cours spécialisés suivants du master de mathématiques de Paris 7 complètent bien notre parcours : Courbe adélique et géométrie d'Arakelov birationnelle II, Les surfaces K3, Géométrie et dynamique (d'après les travaux de Maryam Mirzakhani).

* Cours pouvant être suivi en télé-enseignement.

GA	Géométrie algébrique	TN	Théorie des nombres
Lie	Groupes et algèbres de Lie	GC	Géométrie complexe
GT	Géométrie et topologie	Dyn	Dynamique
Phy	Physique mathématique	Log	Logique
Com	Combinatoire	Pro	Probabilité
HFE	Analyse harmonique, analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles		

Cours introductif

Inégalités

Dario Cordero-Erausquin

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Ce cours a pour but de présenter des techniques variées permettant d'établir des inégalités fonctionnelles et géométriques, techniques et inégalités qui peuvent être utiles dans divers domaines des mathématiques. Ces inégalités seront souvent liées à de la convexité ou à de la "courbure positive".

Nous commencerons par l'inégalité de Brunn-Minkowski et l'inégalité isopérimétrique dans l'espace euclidien. Nous en déduirons des inégalités de concentration pour la mesure gaussienne. Comme application de ce phénomène de concentration, nous établirons le théorème de Dvoretzky qui affirme qu'en grande dimension, les sections (aléatoires) d'un corps convexe sont sphériques (ou plutôt ellipsoïdales). Nous présenterons aussi le lemme de Johnson-Lindenstrauss utilisé en analyse de données.

Nous poursuivrons l'étude des inégalités gaussiennes en introduisant la méthode du semi-groupe de la chaleur. Nous regardons en particulier les inégalités de Poincaré, de Sobolev logarithmique, d'hypercontractivité et l'isopérimètrie gaussienne.

Nous regardons ensuite les versions discrètes des inégalités spectrales de type Poincaré, en lien avec la constante de Cheeger. Nous étudierons les graphes aléatoires d'Erdös-Rényi et les graphes expenseurs. Si le temps le permet, nous regardons le semi-groupe de Walsh sur le cube discret et les versions discrètes de l'hypercontractivité.

Enfin, la dernière partie sera consacrée à la méthode appelée "localisation" ou "en aiguilles", dont l'idée est de localiser l'inégalité que l'on souhaite montrer sur un objet de dimension 1. Cette technique a une longue histoire; elle a été mise en valeur par Kannan-Lovasz-Simonovits dans l'étude des inégalités de Poincaré sur les corps convexes. Nous regarderons aussi la version géométrique due à Nazarov-Sodin-Volberg avec comme application des inégalités d'inverse Hölder pour des fonctions polynomiales de vecteurs aléatoires log-concaves. Si le temps le permet, nous donnerons également les versions riemanniennes (ou du moins sphériques) qui permettent d'établir des inégalités isopérimétriques (théorème de Levy-Gromov).

Contenu

- Autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski et de Prékopa-Leindler
- Inégalités gaussiennes, théorème de Dvoretzky
- Utilisation du semi-groupe de la chaleur. Inégalités de Sobolev logarithmique.
- Inégalités spectrales discrètes, hypercontractivité sur le cube discret
- Localisation en aiguilles, inégalités de Poincaré et d'Hölder inverse

Prérequis

Familiarité avec les notions fondamentales de l'Analyse de M1 (en particulier avec l'intégration). Vocabulaire de base des probabilités, mais aucune connaissance avancée n'est nécessaire pour ce cours.

Bibliographie

– M. Ledoux. The concentration of measure phenomena. *A.M.S, 2001.*

– R. Kannan, L. Lovasz, M. Simonovits. Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma. *Discrete. Comput. Geom, 1995.*

– R. Vershynin. High-Dimensional Probability: An Introduction with Applications in Data Science. *Cambridge U.P., à paraître.*

– D. Bakry, I. Gentil, M. Ledoux. Analysis and geometry of Markov diffusion operators. *Springer, 2014.*

– B. Klartag. Needle Decompositions in Riemannian Geometry. *Memoirs of the A.M.S, 2017.*

Contact : `dario.cordero@imj-prg.fr`

Cours introductif

Introduction à la géométrie algébrique

Ilia Itenberg

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de présenter plusieurs notions et les premiers résultats de la géométrie algébrique en se basant sur beaucoup d'exemples. Conçu dans l'optique de préparer aux cours "Introduction aux schémas I et II" (cours fondamentaux I et II), ce cours introductif s'adresse à tout étudiant intéressé par la géométrie et l'algèbre.

Contenu

- Courbes algébriques planes (affines et projectives).
- Généralités sur les variétés affines et les variétés projectives.
- Applications régulières et applications rationnelles.
- Points lisses et points singuliers, éclatements.
- Diviseurs.
- Surfaces algébriques.

Prérequis

Une familiarité avec les définitions de base de l'algèbre commutative (anneaux, idéaux, modules...) pourra être utile. Le cours ne suivra pas de livre particulier ; les deux références sont données à titre indicatif.

Bibliographie

- I. Shafarevich. Basic algebraic geometry. *Springer-Verlag, 1994*
- R. Hartshorne. Algebraic geometry. *Graduate texts in math. 52, Springer-Verlag, 1977*

Contact : `ilia.itenberg@imj-prg.fr`

Cours introductif

Introduction aux surfaces de Riemann

Marco Maculan

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

L'objectif de ce cours est de proposer une introduction aux divers aspects algébriques, analytiques et géométriques d'un des objets les plus riches et les plus importants des mathématiques, qui est la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine.

Contenu

- Définition et exemples, courbes elliptiques, courbes algébriques, courbes associées aux fonctions holomorphes.
- Aspects topologiques, genre, triangulation, formule de Riemann-Hurwitz.
- Fibrés en droites, différentielles holomorphes et théorème de Riemann-Roch.
- Faisceaux, cohomologie de Dolbeaut, théorème d'Abel-Jacobi.

Prérequis

Analyse complexe de M1 et bases de topologie et de géométrie différentielle.

Bibliographie

- D. Mumford. Algebraic Geometry I : Complex Projective Varieties. *Classics in Mathematics*
- R. Miranda. Algebraic curves and Riemann surfaces. *Graduate Studies in Mathematics*
- O. Forster. Lectures on Riemann Surfaces. *Graduate Texts in Mathematics*
- N. Bergeron et A. Guilloux. Introduction aux surfaces de Riemann. `https://webusers.imj-prg.fr/~nicolas.bergeron/Enseignement_files/SurfaceDeRiemann.pdf`

Contact : `marco.maculan@imj-prg.fr`

Cours introductif

Géométrie différentielle et riemannienne

Julien Marche

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Il s'agit d'une introduction à la géométrie différentielle et riemannienne.

Contenu

- Champs de vecteurs, distributions, formes différentielles.
- Fibrés, connexions, courbure.
- Métriques riemanniennes, géodésiques, courbure riemannienne, liens entre courbure et géométrie/topologie.

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle (niveau M1).

Bibliographie

- Vincent Minerbe. An introduction to differential geometry.
`https://webusers.imj-prg.fr/uploads//vincent.minerbe/Geodiff/m2dg.pdf`
- Gallot, Hulin, Lafontaine. Riemannian Geometry.
- Spivak. A comprehensive introduction to differential geometry.
- Do Carmo. Riemannian Geometry.

Contact : `julien.marche@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Géométrie complexe et théorie de Hodge

Laurent Charles

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours est une introduction à la géométrie complexe. On étudiera entre autres les liens entre structure complexe et topologie, au moyen de la théorie de Hodge. Les résultats sont particulièrement pertinents pour les variétés kähleriennes compactes qui forment une classe assez large et très importante de variétés complexes.

Contenu

- Variétés complexes, cohomologie de Dolbeault, fibrés holomorphes, connexion de Chern
- Opérateurs laplaciens, théorie de Hodge des variétés riemanniennes compactes
- Variétés kähleriennes, identités de la géométrie kählerienne, décomposition de Hodge
- Estimations L2, théorèmes d'annulation, plongement de Kodaira

Prérequis

Surface de Riemann, géométrie différentielle

Bibliographie

- D. Huybrecht. Complex geometry: an introduction.
- C. Voisin. Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.

Contact : `laurent.charles@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Introduction aux formes modulaires

Pierre Charollois

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Ce cours est une introduction aux formes modulaires.

Ce sont des fonctions holomorphes sur le demi-plan de Poincaré qui satisfont une propriété d'invariance sous l'action d'un sous-groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Elles possèdent des propriétés arithmétiques remarquables, encodées notamment dans leurs coefficients de Fourier, ou encore dans leur évaluation en des nombres quadratiques imaginaires (points à Multiplication Complexe).

Contenu

– Formes et fonctions modulaires; notion de poids et de niveau.

– Exemples : séries d'Eisenstein, fonctions thêta, fonction Δ de Ramanujan, l'invariant j.

– Opérateurs de Hecke, formes propres, et leurs fonctions L.

– Multiplication Complexe.

– Produit scalaire de Petersson. Polynôme de périodes.

– Exemples de formes modulaires analytiques réelles. Formule limite de Kronecker.

Prérequis

Notes de cours de M1 théorie des nombres de l'UPMC par J. Nekovář, notamment les chapitres "Gauss" et "Dirichlet".

Bibliographie

– J.-P. Serre. Cours d'arithmétique.

– G. Shimura. Elementary Dirichlet series and modular forms.

– A. Weil. Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker.

– Cohen-Strömberg. Modular forms - a classical approach (2017).

– J. Nekovar. Cours de M1 Théorie des Nombres 2016-2017 à l'UPMC.
`https://webusers.imj-prg.fr/~jan.nekovar/co/nt/`

Contact : `pierre.charollois@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Systèmes dynamiques I

Yves Coudène

Notes de cours : `http://lmba.math.univ-brest.fr/perso/yves.coudene/dea-cours-v4.pdf`.

Présentation

Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps. On suppose généralement que la loi d'évolution est déterministe et fixée. La donnée est alors une transformation d'un espace dans lui même, que l'on peut itérer (temps discret, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$), ou alors une équation différentielle, dont la solution est un flot (temps continu, $\mathbb{R}$). De nombreux exemples intéressants viennent de la physique (mécanique, notamment étude du système solaire, mécanique statistique, ...), mais aussi de l'informatique, la chimie, la biologie... L'évolution pour des temps longs est souvent compliquée, donc difficile (impossible en pratique!), à prédire de façon exacte ("chaos", "effet papillon"). Cependant, divers outils permettent de décrire cette évolution de façon qualitative, notamment probabiliste, pour des classes de dynamiques assez vastes pour inclure des modèles intéressants.

Nous introduirons dans ce cours les notions de base ainsi que les exemples classiques des systèmes dynamiques.

Contenu

– Dynamique topologique
– Introduction à la théorie ergodique, théorèmes ergodiques (Von Neumann, Birkhoff)
– Théorie spectrale
– Homéomorphismes du cercle (nombre de rotation de Poincaré, théorème de Denjoy)
– Entropie métrique, entropie topologique (si le temps le permet).

Prérequis

Topologie, théorie de la mesure, analyse réelle.

Bibliographie

– M. Brin et G. Stuck. Introduction to dynamical systems. *Cambridge University Press, 2002.*

– Y. Coudène. Théorie ergodique et systèmes dynamiques. *EDP Sciences, Savoirs actuels, 2013.*

– P. Walters. An introduction to ergodic theory. *Graduate text in Mathematics, Springer-Verlag.*

– A. Katok et B. Hasselblatt. Introduction to he modern theory of dynamical systems. *Cambridge University Press.*

Contact : `yves.coudene@univ-brest.fr`

Cours fondamental 1

Introduction à l'arithmétique des courbes elliptiques

Jean-François DAT (Travaux dirigés par Marco Maculan)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ est une courbe algébrique non-singulière que l'on peut obtenir comme lieu des zéros d'un polynôme homogène de degré 3 dans le plan projectif sur $\mathbb{Q}$. C'est en quelque sorte l'objet le plus simple de la géométrie arithmétique après les "quadriques". Les points complexes d'une courbe elliptique forment une surface de Riemann dont l'espace topologique sous-jacent est un tore, et donc en particulier un groupe. Le fait que cette loi de groupe soit algébrique et définie sur $\mathbb{Q}$ permet d'attacher des invariants arithmétiques très importants, à savoir la structure du groupe des points rationnels et l'action de Galois sur les points "de torsion". Le but de ce cours sera d'introduire ces notions afin de pouvoir énoncer deux conjectures majeures du 20ème siècle : celle de Birch et Swinnerton-Dyer, toujours ouverte, et celle dite "de modularité", célèbre pour impliquer le théorème de Fermat, et prouvée par Wiles, Taylor et coauteurs.

Contenu

- Sur $\mathbb{C}$: tores de dimension 1, invariant modulaire, courbes (et formes) modulaires.
- Sur un corps quelconque. Courbes de genre 1, structure de groupe, équations, isogénies, points de torsions.
- Sur un corps fini, théorème de Hasse, fonction zeta
- Sur $\mathbb{Q}$, théorème de Mordell-Weil, fonction L, conjectures célèbres.

Prérequis

Cours "Surfaces de Riemann" et "Introduction à la géométrie algébrique".

Bibliographie

- J. SILVERMAN. The arithmetic of elliptic curves. *Graduate Texts in Mathematics 106, Springer.*
- J. NEKOVAR. Elliptic functions and elliptic curves. `https://webusers.imj-prg.fr/~jan.nekovar/co/ln/el/el1.pdf`

Contact : `jean-francois.dat@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Introduction aux schémas I

François LOESER (Travaux dirigés par Mathieu Florence)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours propose une première introduction aux schémas et à leur cohomologie.

Contenu

– Catégories, catégories abéliennes, foncteurs dérivés
– Faisceaux et cohomologie
– Schémas: définitions de base et exemples
– Morphismes séparés, propres
– Faisceaux quasi-cohérents, faisceaux cohérents
– Caractérisation cohomologique des schémas affines

Prérequis

Une certaine familiarité avec l'algèbre commutative. Les cours introductifs de Itenberg et Maculan sont utiles mais pas indispensables.

Bibliographie

– P. SCHAPIRA. Algebra and Topology.
`http://webusers.imj-prg.fr/~pierre.schapira/lectnotes/AlTo.pdf`
– U. GÖRTZ, T. WEDHORN. Algebraic Geometry I. *Vieweg-Teubner, 2010*

Contact : `Francois.Loeser@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Topologie algébrique

Alexandru Oancea (Travaux dirigés par Vincent Humilière)

Notes de cours : `https://webusers.imj-prg.fr/ alexandru.oancea/2016-M2-TOPO-ALG/topo-alg-2016.html`

Présentation

La topologie algébrique fait le lien entre la géométrie et l'algèbre. L'on se propose de distinguer des objets topologiques en leur associant des invariants de nature algébrique (nombres entiers, groupes, anneaux, modules ...) Les idées et images issues de la topologie algébrique irriguent l'ensemble des mathématiques modernes.

Le but de ce cours est d'approfondir les notions d'homologie et de cohomologie à travers l'étude des variétés et des fibrés vectoriels.

Les variétés lisses sont des objets d'une importance centrale en topologie et géométrie. Les fibrés vectoriels modélisent la donnée d'informations supplémentaires de nature infinitésimale le long de la variété base. Les deux thèmes phare que nous allons poursuivre dans ce cours sont la théorie des classes caractéristiques et la dualité de Poincaré. En chemin, nous allons aussi développer la théorie de l'obstruction.

Les notes de cours actuellement disponibles concernent surtout la partie du cours dédiée aux classes caractéristiques. Elles évolueront et s'enrichiront au cours du semestre sur la partie concernant la dualité de Poincaré.

Contenu

- Groupes d'homotopie d'ordre supérieur.
- Homologie et cohomologie singulière.
- Cohomologie des grassmanniennes et point de vue axiomatique sur les classes caractéristiques: Stiefel-Whitney, Chern.
- Point de vue de la théorie de l'obstruction sur les classes de Stiefel-Whitney et Chern.
- Classe fondamentale. Dualité de Poincaré. Classe d'Euler.
- Calculs cohomologiques pour certaines variétés algébriques.

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de topologie algébrique de niveau M1. En particulier, l'objectif de ce cours n'est pas de présenter les bases de l'homologie et de la cohomologie. L'on supposera connues leurs propriétés formelles, et l'on se proposera de donner du contenu géométrique à ces notions.

Nous utiliserons librement dans le cours des notions de topologie différentielle. Il est donc fortement conseillé d'avoir une connaissance du langage de la géométrie différentielle (variétés, applications lisses, espaces tangents), tel que rappelé par exemple dans le Cours Introductif de Géométrie différentielle et riemannienne M2. Nous allons discuter le théorème de Sard et certaines de ses applications, mais il sera utile d'en avoir déjà entendu parler.

Bibliographie

– Allen Hatcher. Algebraic Topology. *Cambridge Univ. Press*
https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf

– Glen Bredon. Geometry and Topology. *Springer*

– John Milnor, Jim Stasheff. Characteristic classes. *Princeton Univ. Press*

– Henri Paul de Saint Gervais. Analysis situs. Topologie algébrique des variétés.
http://analysis-situs.math.cnrs.fr

– Frédéric Paulin. Topologie algébrique élémentaire.
http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf

– Allen Hatcher. Vector bundles and K-theory.
https://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf

Contact : alexandru.oancea@imj-prg.fr

Cours fondamental 2

Théorie de l'intersection

Antoine Ducros

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le célèbre théorème de Bezout en géométrie projective assure que sur un corps de base algébriquement clos, l'intersection de deux courbes projectives planes de degrés respectifs d et d' sans composante irréductible commune comporte exactement dd' points, *à condition de les compter avec multiplicités*.

On peut considérer ce type de résultat comme le point de départ de la *théorie de l'intersection*, qui joue un rôle majeur dans toutes les déclinaisons de la géométrie algébrique (complexe, arithmétique...) ; elle vise à étudier en toute généralité l'intersection de deux sous-variétés d'une variété donnée, les notions de multiplicité qui y sont associées, la façon dont l'intersection varie lorsqu'on "fait bouger" ces sous-variétés...

Le but de ce cours est de présenter les bases de cette théorie, en suivant pour l'essentiel le livre remarquable de Fulton.

Contenu

- Cycles, diviseurs de Weil et de Cartier, fibrés en droite, diviseur d'une fonction, équivalence rationnelle.
- Éclatements. Intersection d'un cycle avec un diviseur de Cartier, commutativité dans le cas de deux diviseurs de Cartier.
- Fibrés vectoriels et projectifs, classes de Segre et de Chern.
- Déformation au cône normal.
- Intersection d'un cycle avec un sous-schéma régulièrement immergé. Théorie de l'intersection sur une variété lisse.

Prérequis

Nous supposerons acquise une bonne connaissance des bases de la géométrie algébrique, même si quelques rappels pourront être faits en cours. Quelques références sur le sujet : chapitre I et II du Hartshorne, cours fondamental I de F. Loeser, mon polycopié de théorie des schémas...

Bibliographie

- William Fulton. Intersection Theory.

Contact : `antoine.ducros@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Théorie de l'homotopie

Grégory Ginot

Notes de cours : `https://www.math.univ-paris13.fr/ ginot/Homotopie/`.

Présentation

Ce cours se veut une introduction à la théorie moderne de l'homotopie. On verra ainsi des notions générales de théorie de l'homotopie englobant la théorie classique des espaces topologiques mais aussi les notions d'algèbre homologique et a des applications en géométrie algébrique. En particulier, on y présentera la théorie des catégories de modèles de Quillen et de leurs catégories homotopiques dans le cadre des espaces topologiques, des complexes de chaines et de structures à homotopie près. On détaillera l'équivalence homotopique entre espaces topologiques et ensembles simpliciaux et on terminera le cours avec une très brève introduction à la notion d'infinie catégorie.

Contenu

- Notions d'homotopie
- Catégories de modèle
- Ensembles simpliciaux
- Algèbre homotopique et complexes de chaines

Prérequis

Ce cours est conçu pour suivre un ou des cours d'introduction à la topologie algébrique et/ou algèbre homologique. Il nécessite des connaissances de base d'homologie, groupe(s) fondamental(ux). Il a été pensé pour faire suite à ceux du premier semestre offerts à P6 et P7.

Bibliographie

- Mark Hovey. Model Categories. *Mathematical Surveys and Monographs Volume: 63; 1999*
- Chuck Weibel. An introduction to homological algebra. *Cambridge studies*
- Jacob Lurie. Higher Topos Theory. *Annals of mathematical Studies*
- Glen Bredon. Topology and geometry. *Springer Graduate Texts in Mathematics*

Contact : `ginot@math.univ-paris13.fr`

Cours fondamental 2

Variétés des caractères et structures hyperboliques en dimension 3

Antonin Guilloux

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Le but de ce cours est de présenter une étude des variétés de dimension 3 à travers la variété des caractères du groupe fondamental et la recherche de structures hyperboliques. Un exemple fondamental de variété sera les complémentaires de noeud dans la sphère S^3.

L'approche sera concrète et effective, à travers une première étape de triangulation des variétés, pour avoir un modèle combinatoire, qui emmène vers une reformulation algébrique de la variété des caractères (espaces des représentations du groupe fondamental vers $SL(2, \mathbb{C})$ modulo conjugaison) et du problème d'existence de structure hyperbolique.

Parmi les objectifs de ce cours figurent le théorème de chirurgies de Dehn hyperboliques de Thurston, et l'étude du volume des variétés hyperboliques de dimension 3 dûe à Neumann-Zagier

Ce cours parcourt des notions maintenant classique et peut servir d'introduction à la géométrie hyperbolique et aux variétés de caractères. Les travaux dirigés illustreront l'étude faite en cours et en montreront l'aspect effectif.

Contenu

- Géométrie et topologie des variétés hyperboliques de dimension 3
- Variétés de caractères

Prérequis

Bibliographie

- W. Thurston. Geometry and topology of 3 manifolds.
http://library.msri.org/books/gt3m/
- W. Neumann et D. Zagier. Volumes of hyperbolic three-manifold. *Topology, 24 (1985), pp. 307–332*

Contact : antonin.guilloux@imj-prg.fr

Cours fondamental 2

Systèmes dynamiques II

Patrice Le Calvez (Travaux dirigés par Pierre-Antoine Guiheneuf)

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Ce cours, qui constitue la suite du cours Systèmes dynamiques I du premier semestre, sera principalement consacré à l'étude des systèmes dynamiques uniformément hyperboliques. Ceux-ci forment une large classe de systèmes qui sont à la fois “chaotiques” et stables. Nous introduirons les exemples fondamentaux (doublement de l'angle, fer à cheval de Smale, automorphismes linéaires hyperboliques du tore) et les principaux outils pour leur étude : outre l'entropie introduite au premier semestre, les chaînes de Markov topologiques, les automorphismes hyperboliques d'un espace vectoriel de dimension quelconque, et les partitions de Markov. Nous verrons les liens qui existent entre entropie et action sur le groupe fondamental. Si le temps le permet nous, introduirons la notion d'indice de Conley ainsi que la notion d'exposant de Lyapounov.

Contenu

– Sous-décalages de type fini
– Théorème de la variété stable et théorème de Grobman-Hartman
– Systèmes dynamiques uniformément hyperboliques, difféomorphismes linéaires du tore
– Partitions de Markov
– Entropie et groupe fondamental et si le temps le permet, introduction à l'indice de Conley
– Si le temps le permet, étude des exposants de Lyapounov

Prérequis

Systèmes dynamiques I

Bibliographie

– Hasselblatt, Katok. Modern Theory of dynamical systems.

Contact : patrice.le-calvez@imj-prg.fr

Cours fondamental 2

Introduction aux schémas II

François Loeser (Travaux dirigés par Mathieu Florence)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours est la suite du cours “Introduction aux schémas I”

Contenu

- Finitude de la cohomologie des faisceaux cohérents dans le cas projectif
- Différentielles
- Morphismes plats, lisses, étales
- Dimension
- Théorème de constructibilité de Chevalley
- Descente fidèlement plate

Prérequis

Le contenu du cours “Introduction aux schémas I”

Bibliographie

- U. Görtz, T. Wedhorn. Algebraic Geometry I. *Vieweg-Teubner, 2010*

Contact : `Francois.Loeser@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Combinatoire des polytopes

Arnau Padrol (Travaux dirigés par Vincent Pilaud (LIX, École Polytechnique))

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

L'objectif de ce cours est de proposer un parcours initiatique à la combinatoire géométrique. Le cours sera centré sur la théorie combinatoire des polytopes et ses connexions avec la convexité, l'optimisation et la programmation linéaire, la topologie combinatoire, la théorie des matroides orientés, et la complexité algorithmique des problèmes de réalisation.

Il comportera deux parties aux objectifs différents : la première partie donnera un panorama des résultats fondamentaux de la théorie combinatoire des polytopes (Minkowski-Weyl, treillis des faces, relation d'Euler, théorèmes de la borne supérieure et inférieure), tandis que la deuxième partie approfondira une direction particulière en se focalisant sur les espaces de réalisation de polytopes et le célèbre théorème d'universalité de Mnëv.

L'un des enjeux est d'apprendre à appréhender la géométrie en grande dimension. Le cours donnera différentes approches pour générer, manipuler et comprendre des polytopes au delà de la dimension 3 (diagrammes de Schlegel, dualité de Gale). Par ailleurs, le cours soulignera que le passage en dimension plus grande que 4 fait apparaître des phénomènes qui contredisent l'intuition et des résultats classiques de la dimension 3. Par exemple, on montrera l'existence de polytopes dont le graphe est complet, de polytopes sans réalisation rationnelle, et la difficulté algorithmique de réaliser géométriquement les 3-sphères (aussi difficile que la théorie existentielle des réels).

Contenu

- Résultats fondamentaux : Minkowski-Weyl et élimination de Fourier-Motzkin
- Combinatoire des treillis de faces
- f- et h-vecteurs, relations de Dehn-Sommerville
- Théorème de la borne supérieure
- Matroides orientés et dualité de Gale
- Théorème d'universalité de Mnëv

Prérequis

Pas de prérequis particuliers (hormis les bases de l'algèbre linéaire et de la géométrie affine).

Bibliographie

– Günter M. Ziegler. Lectures on Polytopes. *Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1998*

– Jiří Matoušek. Lectures on discrete geometry. *Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2002*

– Jesus A. De Loera, Jörg Rambau, and Francisco Santos. Triangulations : Structures for Algorithms and Applications. *Algorithms and Computation in Mathematics. Springer Verlag, 2010*

– Jürgen Richter-Gebert. Realization spaces of polytopes. *Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1996*

Contact : arnau.padrol@imj-prg.fr

Cours spécialisé

Géométrie algébrique des objets combinatoires

Omid Amini

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est de donner une introduction à la géométrie algébrique des objets combinatoire comme graphes, complexes simpliciaux et matroïdes, qui apparaissent naturellement en géométrie algébrique, par exemple, quand on étudie les dégénérescences des variétés algébriques. Des liens avec les géométries non-archimédienne et tropicale seront illustrés, et des applications aux problèmes classiques de la géométrie algébrique et arithmétique seront étudiées.

Contenu

- Géométrie algébrique des graphes finis et métriques.
- Courbes algébriques et graphes métriques.
- Applications à la géométrie d'une courbe générique.
- Points rationnels.
- Géométrie algébrique combinatoire en dimension supérieure : groupes de Chow et théorie de Hodge.

Prérequis

Cours introductif à la géométrie algébrique; une bonne partie du cours est néanmoins de nature entièrement combinatoire, accessible aux étudiants intéressés par un parcours orienté vers la combinatoire.

Bibliographie

Contact : `oamini@dma.ens.fr`

Cours spécialisé

Introduction à la théorie perfectoïde et ses applications en algèbre commutative

Yves ANDRÉ

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Autrefois, l'algèbre commutative était l'étude des anneaux commutatifs et de leurs idéaux (Krull). Sous l'impulsion de Serre et d'Auslander, elle a muté en étude homologique des modules sur les anneaux commutatifs, qui s'est structurée depuis un demi-siècle autour d'une série de conjectures dites homologiques (Peskine, Szpiro, Hochster) éclairant les problèmes de singularités et d'intersections.

Ces conjectures sont établies depuis longtemps lorsqu'on dispose d'un corps de base, mais elles n'ont été démontrées que tout récemment dans le cas général, grâce à des idées issues de développements récents de la théorie des nombres: la théorie perfectoïde.

Le but du cours est de faire un tour d'horizon des conjectures homologiques en algèbre commutative, de présenter les algèbres perfectoïdes (Scholze et al.) et d'expliquer leur intervention dans la preuve de ces conjectures (la théorie perfectoïde a beaucoup d'autres applications auxquelles on fera peut-être allusion si le temps le permet).

Contenu

- presque-algèbre
- théorie perfectoïde
- conjecture du facteur direct
- algèbres de Cohen-Macaulay

Prérequis

Lectures conseillées: chapitres de base du livre sur l'algèbre commutative de Matsumura et/ou cours en ligne de Mel Hochster sur sa page web (notions de localisation, dimension, etc...).

Bibliographie

- Matsumura. Commutative ring theory.
- Hochster. `http://www.math.lsa.umich.edu/~hochster/`.

Contact : `yves.andre@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Marches aléatoires sur les groupes

Anna Erschler

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Il y a une double motivation possible pour une étude des marches aléatoires sur les groupes. Du point de vue de la théorie des groupes, les marches aléatoires sur les groupes fournissent de nombreux invariants probabilistes du groupe. Dans le cas de groupes de type fini, ces invariants sont étroitement liés à la géométrie des graphes de Cayley correspondants. Un problème plus difficile qui reste un défi est de relier les invariants probabilistes aux propriétés algébriques du groupe en question.

Du point de vue des marches aléatoires, les espaces homogènes fournissent un contexte riche qui généralise des exemples classiques de marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$. L'invariance du noyau de Markov par rapport à l'action de groupe impose la structure naturelle et des propriétés stochastiques intéressantes de marches aléatoire et de leurs trajectoires.

Les sujets du cours incluront la récurrence / la transience, les probabilités de transition, l'isopérimétrie, la vitesse de la fuite et l'entropie, comportement asymptotique des trajectoires, bord de Martin et de Poisson des marches aléatoires.

Contenu

– les estimations gaussiennes de Carne Varopoulos

– les inégalités entre les probabilités de transition et le profil isopérimétrique

– l'absence de fonctions harmoniques positives pour les marches aléatoires symétrique sur les groupes nilpotents (Margulis)

– le critère d'entropie (Kaimanovich Vershik et Derriiennic)

– charactérisation de groupes moyennables par l'existence de la mesure dont le bord de Poisson est trivial (Furstenberg, Rosenblatt, Kaimanovich Vershik)

– la construction des mesures dont le bord de Poisson est non triviale sur tous les groupes de type fini, à l'exception de groupes virtuellement nilpotents (Hartmann, Frisch, Tamuz et Vahidi-Ferdowsi, 2018)

Prérequis

Aucun prérequis spécifique en probabilité n'est requis.

Bibliographie

– W. Woess. Random Walks on Infinite Graphs and Groups. *Cambridge Tracts in Mathematics 138, Cambridge University Press,2000*

– V.A.Kaimanovich, A.M.Vershik. Random walks on discrete groups: boundary and entropy.. *Ann. Probab. 11 (1983), no. 3, 457 - 490.*

– R. Lyons, Yu. Peres. Probability on trees and networks.. *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 42. Cambridge University Press, New York, 2016* `http://mypage.iu.edu/~rdlyons/prbtree/book_corr.pdf`

– J. Frisch, Y. Hartman, O. Tamuz, P. Vahidi Ferdowsi. Choquet-Deny groups and the infinite conjugacy class property. *preprint 2018* https://arxiv.org/abs/1802.00751

Contact : anna.erschler@ens.fr

Cours spécialisé

Matrices aléatoires et leurs applications

Omer Friedland et Henrik Ueberschar

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Une grande partie de la théorie des matrices aléatoires tourne autour des propriétés limites du spectre d'une matrice aléatoire A, lorsque la taille N de la matrice A tend vers l'infini. Un exemple remarquable d'une telle approche est la loi du demi-cercle de Wigner, qui prédit le nombre de valeurs singulières de la matrice A qui tombent dans un intervalle donné lorsque N tend vers l'infini. Dans ce cours, nous étudierons des résultats asymptotiques et non asymptotiques.

De nombreuses applications nécessitent une compréhension de ce qui se passe pour un N fixe plutôt que dans la limite. Par exemple, en analyse numérique, on quantifie (arrondis) les nombres réels en les mettant dans un ordinateur. La quantification est habituellement modélisée comme une perturbation aléatoire légère. La stabilité d'un système d'équations linéaires $Ax = b$ sous la quantification dépend du conditionnement de la matrice aléatoire A, le rapport des plus grandes et des plus petites valeurs singulières de A. Il faut donc comprendre le spectre des matrices aléatoires dans les dimensions finies N (pas seulement dans la limite). Une telle théorie de matrices aléatoires non asymptotique sera le contenu de la première partie de ce cours. Il mettra l'accent sur des techniques non-asymptotiques "douces" plutôt que sur des résultats "durs", qui pourraient être utiles pour d'autres problèmes. Ces techniques incluront: les inégalités de concentration, les inégalités de martingale et diverses méthodes de géométrie convexe asymptotique.

La deuxième partie du cours portera sur les résultats asymptotiques et leurs applications à la physique mathématique ainsi qu'à la théorie des nombres. Nous allons étudier la limite lorsque N tend vers l'infini et en particulier les statistiques d'espacements des valeurs propres pour l'ensemble gaussien unitaire et gaussien orthogonal (GUE/GOE). Nous discuterons ensuite comment les distributions d'espacements asymptotiques pour les ensembles GUE et GOE servent comme modèles des distributions d'espacements des valeurs propres dans divers problèmes spectraux en physique mathématique, en mettant l'accent sur les systèmes quantiques chaotiques et désordonnés. Une autre application surprenante concerne l'étude des statistiques des zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann. Nous discuterons comment la théorie des matrices aléatoires permet de calculer les moments de la fonction zêta de Riemann et plus généralement les fonctions L et leur importance dans la théorie des nombres.

Contenu

- Les ensembles gaussien unitaire et orthogonal
- Les valeurs singulières des matrices aléatoires
- La loi du demi-cercle de Wigner
- Les inégalités de concentration
- Statistique spectrale
- Applications de matrices aléatoires: physique mathématique, géométrie convexe asymptotique, etc.

Prérequis

Probabilité, EDP

Bibliographie

– Tao, Terence. Topics in random matrix theory. *American Mathematical Society*
– Mehta, Madan Lal. Random matrices. *Elsevier*

Contact : omer.friedland@imj-prg.fr

Cours spécialisé

Géométrie symplectique

Sobhan Seyfaddini

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours sera une introduction à la topologie symplectique. Nous verrons quelques-uns des théorèmes fondamentaux du domaine: Rigidité C^0 d'Eliashberg et Gromov, Non-squeezing de Gromov, Conjecture d'Arnold. Cela passera par la construction d'un outil très puissant: les courbes pseudo-holomorphes de Gromov et l'homologie de Floer.

Contenu

– Variétés symplectiques

– Homologie de Morse

– Homologie de Floer

Prérequis

Il est indispensable d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle de niveau M1 (variétés, formes différentielles, champs de vecteurs) et un cours de topologie algébrique de niveau M1 (homologie et cohomologie singulière, algébre homologique élémentaire).

Bibliographie

– M. Audin, M. Damian.. Théorie de Morse et homologie de Floer. *EDP Sciences, CNRS Editions, 2010*

– D. McDuff, D. Salamon. Introduction to symplectic topology. *Oxford University Press,1998*

– D. Salamon. Lectures on Floer homology.
`https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/floer.pdf`

Contact : `sobhan.seyfaddini@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Déformations de groupes discrets dans les groupes de Lie

Nicolas Tholozan

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Ce cours se veut une introduction progressive à la théorie des représentations Anosov, développée durant les quinze dernières années. Cette introduction sera guidée par les questions suivantes:

- Quand un sous-groupe discret Γ d'un groupe de Lie G peut-il être déformé ? (i.e. quand existe-t-il une famille à un paramètre non triviale de morphismes $\rho_t : \Gamma \to G$ telle que ρ_0 est l'inclusion ?)

- Lorsque de telles déformations existent, quelles propriétés dynamiques et géométriques du groupe discret préservent-elles ?

Dans un premier temps, afin d'illustrer les phénomènes de rigidité fréquents dans ce contexte, nous démontrerons le théorème de rigidité locale des réseaux (théorème de Calabi–Weil) et nous énoncerons les autres grands théorèmes de rigidité (Mostow, Margulis...). En regard de ces résultats de rigidité, nous présenterons ensuite de nombreux exemples explicites de déformations de groupes discrets. Nous décrirons en particulier certains aspects des variétés de caractères des groupes de surfaces, qui font l'objet d'une recherche active. Enfin, nous nous intéresserons aux propriétés géométriques et dynamiques des groupes discrets qui sont préservées par déformation. Nous introduirons alors la notion de *morphisme Anosov*, qui fournit un cadre unifié à l'étude de nombreuses déformations d'origine géométrique (représentations quasi-fuchsiennes, convexes divisibles, variétés anti-de Sitter globalement hyperboliques).

Les thématiques abordées dans ce cours sont proches de celles du cours "Variété des caractères et structures hyperboliques en dimension 3". Bien qu'indépendant, ce cours gagnera à être suivi après celui d'Antonin Guilloux.

Contenu

– Rigidité locale de Calabi–Weil
– Variétés de caractères
– Représentations Anosov

Prérequis

Ce cours nécessite de solide connaissances en géométrie différentielle et Riemannienne. Quelques bases de la théorie des groupes de Lie peuvent être utiles. La notion de morphisme Anosov fera écho au cours de Systèmes Dynamiques II. Enfin, ce cours sera thématiquement proche du cours "Variété des caractéres et structures hyperboliques en dimension 3".

Bibliographie

– Gérard Besson. Calabi–Weil rigidity. `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/sites/ifmaquette.ujf-grenoble.fr/files/Besson.pdf`

– François Labourie. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. *Inventiones Mathematicae 2006, vol. 165, no 1, p. 51-114.*

– Olvier Guichard et Anna Wienhard. Anosov representations: domains of discontinuity and applications. *Inventiones Mathematicae, 2012, vol. 190, no 2, p. 357-438.*

Contact : `nicolas.tholozan@ens.fr`