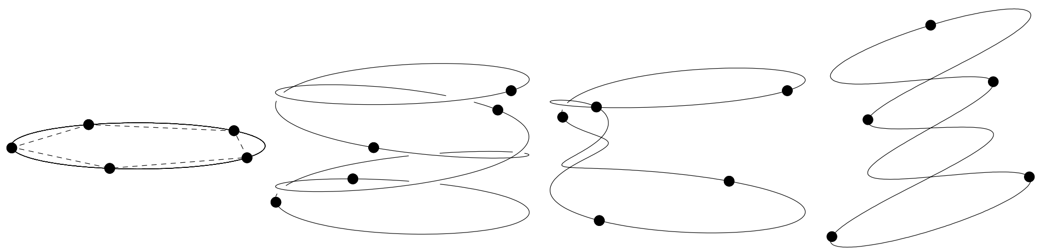
Université Pierre et Marie Curie (Paris vi)

Master de Sciences et Technologie
Mention Mathématiques et Applications

M2 de Mathématiques fondamentales

Année universitaire 2017–2018

Responsables : Ilia Itenberg et Benoît Stroh



Secrétariat : Mme L. Dreyfuss

Campus de Jussieu, 1er étage, couloir 15-25, bureau 1.09
4, place Jussieu, 75005 Paris

Tél & Fax : 01 44 27 85 45
Mél : master.math.fond@upmc.fr
Url : http://mathfond.math.upmc.fr/

Table des matières

1 Le M2 de Mathématiques fondamentales

La spécialité *Mathématiques fondamentales* est une option de la mention *Mathématiques et Applications* du *Master de Sciences et Technologie* de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Elle s'adresse aux étudiants titulaires d'un M1 de mathématiques ou d'un titre équivalent et comprend deux parcours : “Mathématiques Recherche” et “Mathématiques avancées”.

Un large spectre des mathématiques fondamentales est généralement couvert, avec des variations selon les années : théorie des nombres, géométrie algébrique, théorie de Lie, topologie, géométries analytique et différentielle, systèmes dynamiques, analyse fonctionnelle, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles, etc.

Parcours “Mathématiques Recherche”

Ce parcours, assez exigeant, s'adresse à tous les étudiants se destinant à un doctorat en Mathématiques fondamentales. Une fois ce doctorat accompli, les débouchés naturels sont les métiers de la recherche et de l'enseignement supérieur, au CNRS, à l'université ou dans les centres de recherche des grandes entreprises. Ces diplômes devraient aussi être un gage de puissance et de créativité intellectuelles suffisant pour intéresser les entreprises de haute technologie, comme c'est déjà le cas pour des diplômes équivalents en Allemagne, au Royaume Uni et aux Etats-Unis.

Parcours “Mathématiques Avancées”

Ce parcours, plus abordable, intéressera les étudiants dont le but principal est de valider le Master, sans poursuivre en doctorat. Les cours proposés sont essentiellement les mêmes que pour le parcours “Recherche”, mais les règles de validation sont assouplies, et il est aussi possible de valider certains cours de M1 avancés.

Les détails des règles permettant de valider l'un ou l'autre des parcours se trouvent sur la page “Organisation” de cette brochure.

2 Organisation et déroulement du M2

Comme tout M2, le cursus comprend des *cours* et un *stage*. Les règles de validation dépendent du parcours envisagé.

Les cours se répartissent en 4 périodes de 6 semaines, regroupées de la façon suivants :

- cours d'introduction de 24 heures sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours fondamentaux I et II, de 24 heures plus 12 heures de TD, sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours spécialisés, en général de 24h sur 6 semaines (9 ECTS chacun).

En règle générale, la validation de chaque cours est conditionnée par la réussite à un examen écrit qui se tient à la fin de l'enseignement concerné. Une session de rattrapage pourra être organisée en juin, si nécessaire : les étudiants intéressés par un rattrapage devront contacter directement les enseignants. Pour les cours spécialisés, la validation peut prendre d'autres formes : examen oral, mini-mémoire de synthèse sur un thème connexe, etc.

Voici les règles de validation des deux parcours.

Parcours "Mathématiques Recherche"

Les cours (36 ECTS)

Les étudiants doivent valider 4x9=36 ECTS de cours, dont au plus 18 ECTS en cours introductifs et au moins 9 ECTS en cours fonda 2 ou spécialisé. Il est possible de valider des crédits de cours d'autres universités (Paris 7, Orsay...) après accord des responsables du M2, qui vérifieront notamment la cohérence du choix.

Le stage (21 ECTS)

Il consiste en un travail personnel de compréhension, d'explication et de synthèse d'un ou plusieurs articles de recherche, conclu par la rédaction d'un mémoire et une soutenance devant un jury. Le sujet du mémoire est bien souvent, mais pas nécessairement, un tremplin vers le futur sujet de thèse.

Il est conseillé de prospecter pour un directeur de stage potentiel dès que l'on est sûr de son sujet de prédilection. Fin mars semble être une limite raisonnable.

La date de soutenance du mémoire sera fixée en accord avec le directeur de recherche et les membres du jury. *Attention :* les étudiants qui désirent candidater à un **Contrat Doctoral** auprès de l'Ecole Doctorale devront avoir soutenu leur mémoire *avant fin juin.* Pour les autres, la limite ordinaire est *fin septembre.*

Les 3 ECTS d'ouverture

Ils consistent en l'apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Parcours “Mathématiques Avancées”

Les cours (36 ECTS)

Les étudiants doivent valider 36 ECTS sous la forme de cours. Outre les cours du M2, il est possible de valider certains cours du second semestre de M1, dont le niveau est intermédiaire entre M1 et M2. Il faudra pour cela demander l’accord d’un responsable qui s’assurera que

- le cours concerné n’a pas déjà été validé en M1,
- son contenu n’est pas inclus dans celui d’un cours de M2 déjà validé.

Par ailleurs, le nombre d’ECTS ainsi acquises est limité à 18.

Voici la liste des cours de M1 éligibles, dont on trouvera aussi une description sur la brochure générale du Master.

- Groupes et algèbres de Lie (6 ECTS)
- Introduction aux surfaces de Riemann (6 ECTS)
- Topologie algébrique (6 ECTS)
- Théorie analytique des équations différentielles ordinaires (6 ECTS)
- Équations aux dérivées partielles (12 ECTS)
- Histoire des mathématiques (6 ECTS)

Le stage (21 ECTS)

Il est similaire à celui du parcours Recherche. Le sujet du mémoire pourra cependant être plus adapté au projet de l’étudiant, notamment si celui-ci se destine à l’agrégation.

Les 3 ECTS d’ouverture

Ils consistent en l’apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Télé-enseignement

Une possibilité d’enseignement par correspondance est ouverte sur certains cours. Les étudiants par correspondance reçoivent ou téléchargent les polycopiés des cours, passent les examens à l’Université, et correspondent directement avec les enseignants (resp. leur directeur de stage) pour les questions pédagogiques (resp. la préparation de leur mémoire). Certains polycopiés sont disponibles sur les pages web des enseignants.

On consultera le site web du M2 pour des informations à jour concernant les cours disponibles par correspondance.

3 Inscription et candidature

L'inscription au master de Mathématiques fondamentales est réservée aux étudiants titulaires du M1, d'une maîtrise de mathématiques pures, ou d'un diplôme équivalent par décision individuelle d'équivalence du Président de l'Université.

En revanche, l'acceptation n'est pas automatique. Une sélection sera effectuée au vu des résultats obtenus dans les années antérieures. Voici les démarches pour candidater.

Inscription administrative par internet

Obligatoirement remplir un dossier d'inscription administrative via internet sur le site de la scolarité de l'université `http://www.upmc.fr/fr/formations/inscriptions_scolarite.html`. Si ce site est fermé, s'adresser au secrétariat.

Il sera demandé certains renseignements administratifs, après quoi il faudra imprimer le dossier ; de la persévérence peut s'avérer nécessaire ! Un numéro de dossier ainsi qu'un mot de passe vous seront alors attribués, qui permettront de suivre sur ce site l'évolution du statut de votre candidature.

Candidature

Ensuite, constituer un dossier de candidature et le remettre au secrétariat. *Demander au secrétariat la date limite de remise du dossier de candidature* (*courant septembre*).

Ce dossier doit comporter :

- le dossier d'inscription administrative imprimé
- le formulaire de candidature avec photo d'identité (téléchargeable sur le site internet)
- le relevé de notes de M1, délivré par son université d'origine.

Les étudiants ayant des diplômes étrangers doivent fournir en plus :

- la photocopie du programme des cours suivis pendant les quatre années d'études supérieures
- le relevé de notes des quatre années
- la photocopie des diplômes (le Service de la Scolarité en exigera ultérieurement une traduction assermentée ; voir par exemple le site des experts traducteurs `http://www.ceticap.com/`).

Résultats

Dans le cas d'une réponse favorable, l'étudiant recevra une lettre d'acceptation signée par le responsable du parcours. Dans tous les cas, l'avis de la commission sera consultable sur internet.

Bourses

Les étudiants désirant une bourse durant leur année de M2, doivent s'adresser au Bureau des bourses de l'université (campus de Jussieu). Il existe entre autres

- des bourses sur critère universitaire,
- des bourses sur critère social,
- des allocations d'études.

Voir les détails ainsi que les conditions d'attribution (de nationalité, de situation familiale, etc.) sur le site du bureau des bourses `http://www.upmc.fr/fr/vie_des_campus/bourses.html`.

Pour les deux premiers types de bourses ci-dessus il faut déposer une demande entre le 15 janvier et le 30 avril.

Par ailleurs, la Fondation Sciences Mathématiques de Paris offre des bourses d'études à travers son programme "Paris Graduate School of Mathematical Sciences". Consulter `http://www.sciencesmath-paris.fr/pgsm/`.

4 Cours de l'année 2017-2018

Cours introductifs (11 septembre – 20 octobre 2017)

D. Juteau (P7)	Géométrie algébrique I	GA
N. Lerner	Initiation au calcul pseudo-différentiel *	HFE
M. Livernet (P7)	Algèbre homologique et topologie algébrique	GT, GA, Lie
M. Maculan	Introduction aux surfaces de Riemann	GA, GT, GC, TN
J. Marché	Géométrie différentielle et riemannienne	GT
H. Mourtada (P7)	Topologie différentielle	GT
E. Vasserot (P7)	Géométrie et théorie des représentations I	GA, Lie

Cours fondamentaux I (6 novembre – 15 décembre 2017)

J. Cao	Géométrie complexe et théorie de Hodge	GC, GA, GT
P. Charollois	Introduction aux formes modulaires *	TN
R. de la Bretèche (P7)	Une introduction à la théorie analytique des nombres	TN
D. Juteau (P7)	Géométrie algébrique II	GA
F. Klopp	Théorie spectrale des opérateurs aléatoires	HFE
P. Le Calvez	Systèmes dynamiques	Dyn
F. Loeser	Introduction à la théorie des schémas	GA
A. Oancea	Topologie algébrique	Dyn, GA, GC, GT, Lie, Phy
E. Vasserot (P7)	Géométrie et théorie des représentations II	GA, Lie

Cours fondamentaux II (8 janvier – 16 février 2018)

A. Chambert-Loir (P7)	Introduction aux faisceaux pervers *	GA
A. Deloro	Théorie des modèles des groupes affines I *	GA, Log
A. Ducros	Théorie de l'intersection	GA
D. Gérard-Varet (P7)	Méthode de Nash-Moser et EDP non-linéaires	HFE
G. Ginot (P13)	Introduction à l'homotopie	GT
T. Gowers (ENS)	Introduction à la combinatoire additive	Com, TN
A. Guilloux	Variétés des caractères et structures hyperboliques en dimension 3 *	GT, Lie
F. Loeser	Cohomologie étale	GA
X. Ma (P7)	Variétés hamiltoniennes et quantification géométrique *	GT, Lie
B. Stroh	Courbes elliptiques *	GA, TN, Lie
A. Zorich (P7)	Géométrie et dynamique	Dyn, GT

Cours spécialisés (26 février – 6 avril 2018)

O. Debarre (ENS)	Les surfaces K3	GA
A. Deloro	Théorie des modèles des groupes affines II *	GA, Log
B. Deroin	Géodésiques fermées simples sur les surfaces hyperboliques	Dyn, GT
A. Erschler (ENS)	Invariants géométriques des groupes infinis	GT
A. Guilloux	Espace de drapeaux et variétés de caractères *	GT, Lie
E. Letellier (P7)	Applications des faisceaux pervers en théorie des représentations *	GA, Lie, TN
M. Morrow	Espaces adiques et espaces perfectoïdes	GA, TN
J. Szeftel	Autour de la stabilité de l'espace-temps de Minkowski	HFE, Phy
C. Voisin (Collège de France)	Variétés hyperkählériennes (à partir de 01/03)	GA, GC

* Cours pouvant être suivi en télé-enseignement.

GA	Géométrie algébrique	TN	Théorie des nombres	Lie	Groupes et algèbres de Lie
GC	Géométrie complexe	GT	Géométrie et topologie	Dyn	Dynamique
Phy	Physique mathématique	Com	Combinatoire	Log	Logique

HFE Analyse harmonique, analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles

Chaque cours a un volume de 24h, sur 6 semaines (à l'exception du cours de T. Gowers ; ce cours sera sur 12 semaines). Les cours fondamentaux sont doublés par 12h de TD, qui sont assurés par l'auteur du cours (sauf mention du contraire). Les cours ont généralement lieu sur le campus Jussieu, ou sur le site PRG, si l'enseignant est de Paris 7. Les cours de T. Gowers et A. Erschler auront lieu à l'ENS. Le cours de C. Voisin aura lieu au Collège de France.

Cours introductif

Géométrie algébrique I

Daniel JUTEAU (Travaux dirigés par Marco Maculan)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de donner une introduction à la géométrie algébrique, dans l'esprit du cours que donnait Joseph Le Potier. Dans la première partie du cours, nous verrons les variétés algébriques (en tant qu'espaces annelés) et leurs morphismes ainsi que leurs propriétés. Dans la deuxième partie, nous étudierons plus particulièrement les fibrés vectoriels, les diviseurs, les faisceaux algébriques cohérents et leur cohomologie. À la fin nous prouverons la formule de Riemann-Roch.

Contenu

- Variétés algébriques
- Fibrés vectoriels et faisceaux algébriques
- Cohomologie
- La formule de Riemann-Roch

Prérequis

Modules sur un anneau commutatif.

Bibliographie

- JOSEPH LE POTIER. Géométrie algébrique. *Polycopié* https://www.imj-prg.fr/tga/jlp/coursM2_le_potier.pdf
- JOE HARRIS. Algebraic geometry. *GTM 133*
- SHAFAREVICH. Basic algebraic geometry. *Springer-Verlag*
- ROBIN HARTSHORNE. Algebraic geometry. *GTM 52*

Contact : daniel.juteau@imj-prg.fr

Cours introductif

Initiation au calcul pseudo-différentiel

Nicolas Lerner

Notes de cours : `http://www.math.jussieu.fr/~lerner/index.pseudom2.html`.

Présentation

Le but de ce cours est de fournir une présentation élémentaire de quelques versions du calcul pseudo-différentiel. Nous commencerons par des rappels d'analyse de Fourier. Nous étudierons ensuite quelques formules de quantification et donnerons quelques résultats de base sur le calcul pseudo-différentiel pour des opérateurs dotés de symboles appartenant aux classes les plus simples ; on s'intéressera notamment aux propriétés de continuité (L^2 et Sobolev), de composition et de développement asymptotique. Nous donnerons ensuite une démonstration complète de l'inégalité de Gårding à l'aide de la quantification anti-Wick. Nous fournirons quelques applications à la régularité des solutions d'EDP (micro)elliptiques et à la propagation des singularités pour des EDP de type principal réel. Ensuite nous étudierons une version semi-classique du calcul pseudo-différentiel et fournirons quelques applications à la théorie spectrale.

Contenu

- Analyse de Fourier
- Quantification, fonctions de Wigner
- Algèbres d'opérateurs pseudo-différentiels
- Inégalités de Gårding
- Calcul semi-classique
- Applications

Prérequis

Intégration, Calcul différentiel, Analyse de Fourier.

Bibliographie

– Hörmander, Lars. The Analysis of Linear Partial Differential Operators III. *Springer-Verlag, Classics in Mathematics, Berlin 2007.*

– Lerner, Nicolas. Metrics on the phase space and non-selfadjoint pseudo-differential operators. *Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.*

– Zworski, Maciej. Semiclassical Analysis. *AMS, Graduate Studies in Mathematics, 138.*

– Dimassi, Mouez; Sjöstrand, Johannes. Spectral asymptotics in the semi-classical limit. *London Mathematical Society Lecture Note Series, 268. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.*

– Métivier, Guy . Para-differential calculus and applications to the Cauchy problem for nonlinear systems.. *Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi (CRM) Series, 5. Edizioni della Normale, Pisa, 2008.*

– Saint Raymond, Xavier . Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators. *Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1991.*

Contact : nicolas.lerner@imj-prg.fr

Cours introductif

Algèbre homologique et topologie algébrique

Muriel Livernet

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Résumé: Les outils d'algèbres homologiques sont incontournables en topologie algébrique, et sont également utilisés dans bien d'autres domaines, comme la géométrie algébrique, la théorie des représentations ou la physique mathématique. Nous donnerons dans ce cours les bases d'algèbre homologique et nous étudierons les foncteur Tor et Ext. Nous appliquerons ces notions à l'étude de l'homologie et de la cohomologie des groupes, algèbres associatives et espaces topologiques.

Objectifs: Donner de solides bases en algèbre homologique; étudier des exemples d'applications dans divers domaines ainsi qu'en topologie algébrique.

Contenu

- Langage des catégories, Complexes de chaines, homologie, homotopie
- Résolutions projectives, résolutions injectives, Foncteurs Tor et Ext
- (Co)homologie des groupes; (co)homologie de Hochschild.
- Axiomes d'Eilenberg-Steenrod pour l'homologie des espaces topologiques
- Modèles acycliques, théorème d'Eilenberg-Zilber
- cup produit en cohomologie. Applications.

Prérequis

Cours d'algèbre commutative, notions de topologie.

Bibliographie

- Allen Hatcher. Algebraic Topology. *Cambridge University Press, Cambridge, 2002.*
- Saunders Mac Lane. Homology. *Reprint of the 1975 edition, Springer-Verlag, Berlin, 1995*
- James Munkres. Elements of algebraic topology. *Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984*

Contact : `livernet@imj-prg.fr`

Cours introductif

Introduction aux surfaces de Riemann

Marco Maculan

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

L'objectif de ce cours est de proposer une introduction aux divers aspects algébriques, analytiques et géométriques d'un des objets les plus riches et les plus importants des mathématiques, qui est la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine.

Contenu

- Définition et exemples, courbes elliptiques, courbes algébriques, courbes associées aux fonctions holomorphes.
- Aspects topologiques, genre, triangulation, formule de Riemann-Hurwitz.
- Fibrés en droites, différentielles holomorphes et théorème de Riemann-Roch.
- Faisceaux, cohomologie de Dolbeaut, théorème d'Abel-Jacobi.

Prérequis

Analyse complexe de M1 et bases de topologie et de géométrie différentielle.

Bibliographie

- D. Mumford. Algebraic Geometry I : Complex Projective Varieties. *Classics in Mathematics*
- R. Miranda. Algebraic curves and Riemann surfaces. *Graduate Studies in Mathematics*
- O. Forster. Lectures on Riemann Surfaces. *Graduate Texts in Mathematics*
- N. Bergeron et A. Guilloux. Introduction aux surfaces de Riemann. `https://webusers.imj-prg.fr/~nicolas.bergeron/Enseignement_files/SurfaceDeRiemann.pdf`

Contact : marco.maculan@imj-prg.fr

Cours introductif

Géométrie différentielle et riemannienne

Julien Marché

Présentation

Il s'agira d'une introduction à la géométrie différentielle et riemannienne.

Contenu

- Variétés, champs de vecteurs, formes différentielles.
- Fibrés, connexions, courbure.
- Métriques riemanniennes, géodésiques, courbure riemannienne, liens entre courbure et géométrie/topologie.

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle (niveau M1), même si des rappels seront faits.

Bibliographie

- Gallot, Hulin, Lafontaine. Riemannian Geometry.
- Spivak. A comprehensive introduction to differential geometry.
- Petersen. Riemannian Geometry.
- Chavel. Riemannian Geometry: a modern introduction.
- Do Carmo. Riemannian Geometry.

Contact : `julien.marche@imj-prg.fr`

Cours introductif

Topologie différentielle

Hussein Mourtada

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Dans ce cours, nous introduisons les éléments de base de la topologie différentielle et nous ferons le lien avec les invariants de la topologie algébrique. Ces connaissances sont importantes en géométrie différentielle, en topologie algébrique, en dynamique et peuvent être utiles en géométrie algébrique.

Contenu

- Éléments d'homologie et de cohomologie singulières. Homologie et cohomologie cellulaires
- Variétés et sous variétés lisses. Lemme de Sard. Transversalité. Indice d'intersection et degré d'une application. Théorie de Morse.
- Fibrés vectoriels et classes caractéristiques.

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle de niveau M1.

Bibliographie

- V. Guillemin, A. Pollack. Differential topology. *AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010*
- A. Hatcher. Algebraic topology. *Cambridge University Press, Cambridge, 2002*
- M. W. Hirsch. Differential topology. *Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer-Verlag, New York, 1994.*
- J. Milnor, J. D. Stasheff. Characteristic classes..
- J. Milnor. Topology from the differentiable viewpoint.
- J. Milnor. Morse Theory. *Annals of Mathematics Study, 51 Princeton Univ. Press, Princeton (1962)*

Contact : hussein.mourtada@imj-prg.fr

Cours introductif

Géométrie et théorie des représentations I

Eric VASSEROT

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est d'abord d'introduire quelques notions de base en théorie de Lie (algèbres de Lie réductives, systèmes de racines, représentations de plus haut poids, groupes algébriques). Ensuite on donnera quelques outils de géométrie algébrique qui sont fondamentaux pour la théorie des représentations (variétés de drapeaux, cellules de Bruhat,...). Si on en a le temps, le théorème de localization de Beilinson-Bernstein sera évoqué en fin de cours.

Contenu

- algèbres de Lie réductives
- systèmes de racines
- représentations de plus haut poids
- groupes algébriques
- variétés de drapeaux
- décomposition de Bruhat

Prérequis

Bibliographie

- HUMPHREYS . Introduction to Lie algebras and Representation Theory.
- CHRISS ET GINZBURG . Representation theory and complex geometry.
- BOREL . Linear algebraic groups.
- HUMPHREYS . Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category O.

Contact : `eric.vasserot@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Géométrie complexe et théorie de Hodge

Junyan Cao

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est de donner une introduction à la géométrie complexe. Comme une variété complexe est aussi un espace topologique, il est intéressant d'étudier les liens entre la structure complexe et la topologie. La théorie de Hodge est un outil puissant qui fournit ces liens entre géométrie et topologie. On verra que les résultats sont particulièrement pertinents dans le cas des variétés kähleriennes compactes qui sont une classe assez large et très importante de variétés complexes.

Contenu

- Variétés complexes, cohomologie de Dolbeault, fibrés holomorphes, connexion de Chern
- Opérateurs laplaciens, théorie de Hodge des variétés riemanniennes compactes
- Variétés kähleriennes, identités de la géométrie kählerienne, décomposition de Hodge
- Estimations L^2, théorèmes d'annulation, plongement de Kodaira

Prérequis

Surfaces de Riemann, géométrie différentielle

Bibliographie

- J.-P. Demailly. Complex analytic and differential geometry. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/documents.html
- D. Huybrecht. Complex geometry: an introduction.
- C. Voisin. Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.

Contact : junyan.cao@imj-prg.fr

Cours fondamental 1

Introduction aux formes modulaires

Pierre Charollois

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Ce cours est une introduction aux formes modulaires.

Ce sont des fonctions holomorphes sur le demi-plan de Poincaré qui satisfont une propriété d'invariance sous l'action d'un sous-groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Elles possèdent des propriétés arithmétiques remarquables, encodées notamment dans leurs coefficients de Fourier, ou encore dans leur évaluation en des nombres quadratiques imaginaires (points à Multiplication Complexe).

Contenu

- Formes et fonctions modulaires; notion de poids et de niveau.
- Exemples : séries d'Eisenstein, fonctions thêta, fonction Δ de Ramanujan, l'invariant j.
- Opérateurs de Hecke, formes propres, et leurs fonctions L.
- Multiplication Complexe.Théorème de Damerell.
- Produit scalaire de Petersson. Polynôme de périodes.
- Exemples de formes modulaires analytiques réelles. Formule limite de Kronecker.

Prérequis

Notes de cours de M1 théorie des nombres de l'UPMC par J. Nekovář, notamment les chapitres "Gauss" et "Dirichlet".

Bibliographie

- J.-P. Serre. Cours d'arithmétique.
- G. Shimura. Elementary Dirichlet series and modular forms.
- A. Weil. Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker.
- Diamond-Shurman. A first course in modular forms.
- J. Nekovar. Cours de M1 Théorie des Nombres 2016-2017 à l'UPMC. `https://webusers.imj-prg.fr/~jan.nekovar/co/nt/`

Contact : `pierre.charollois@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Une introduction à la théorie analytique des nombres

Régis de la Bretèche

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours consiste à une initiation courte à la théorie analytique des nombres. Ce domaine se situe à l'interface avec beaucoup d'autres domaines des mathémathiques : formes modulaires, géométrie algébrique, combinatoire ... Il s'agit de donner quelques repères (on démontrera le théorème des nombres premiers) et on évoquera quelques développements très récents sur les fonctions sommatoires de fonctions multiplicatives.

La brièveté du cours demandera un fort investissement des élèves qui veulent le suivre.

Contenu

- fonction arithmétique
- théorème des nombres premiers
- fonctions sommatoires de fonctions multiplicatives
- série de Dirichlet

Prérequis

Bibliographie

- Tenenbaum. Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.
- Davenport. Multiplicative Number Theory.
- Iwaniec Kowalski. Analytic Number Theory.

Contact : `regis.delabreteche@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Géométrie algébrique II

Daniel Juteau (Travaux dirigés par Marco Maculan)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de donner une introduction à la géométrie algébrique, dans l'esprit du cours que donnait Joseph Le Potier. Dans la première partie du cours, nous verrons les variétés algébriques (en tant qu'espaces annelés) et leurs morphismes ainsi que leurs propriétés. Dans la deuxième partie, nous étudierons plus particulièrement les fibrés vectoriels, les diviseurs, les faisceaux algébriques cohérents et leur cohomologie. À la fin nous prouverons la formule de Riemann-Roch.

Contenu

- Variétés algébriques
- Fibrés vectoriels et faisceaux algébriques
- Cohomologie
- La formule de Riemann-Roch

Prérequis

Cours "Géométrie algébrique I".

Bibliographie

- Joseph Le Potier. Géométrie algébrique. *Polycopié* `https://www.imj-prg.fr/tga/jlp/coursM2_le_potier.pdf`
- Joe Harris. Algebraic geometry. *GTM 133*
- Shafarevich. Basic algebraic geometry. *Springer-Verlag*
- Robin Hartshorne. Algebraic geometry. *GTM 52*

Contact : `daniel.juteau@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Théorie spectrale des opérateurs aléatoires

Frédéric Klopp

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours se veut une présentation de résultats récents sur la théorie spectrale des opérateurs aléatoires dans le régime localisé par le biais du modèle le plus simple, le modèle d'Anderson.

Introduits en physique de la matières condensée dans les années 50, les opérateurs aléatoires modélisent la propagation des électrons dans un milieu désordonnée. L'hypothèse stochastique se justifie par la présence homogène d'impuretés dont seules sont connues des caractéristiques macroscopiques comme la densité.

Le caractère aléatoire et homogène du potentiel confère aux opérateurs aléatoires de nombreuses propriétés intéressantes, en particulier, une propriété d'ergodicité qui assure que, de nombreux points de vue, la famille d'opérateur se comporte comme un opérateur unique. Cette liberté est alors exploitée pour l'étude de ces opérateurs.

L'une des caratéristiques de ces modèles est la présence d'un régime localisé i.e. d'intervalles dans le spectre qui ne sont constitués que de spectre ponctuel et tel que les fonctions propres associées aux valeurs propres dans ces intervalles sont à décroissance exponentielle.

L'analyse des opérateurs aléatoires se situe aux confins de plusieurs domaines des mathématiques, la théorie spectrale et celle des probabilités mais aussi de l'analyse harmonique et de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Contenu

- L'ergodicité et ses conséquences. La densité d'états intégrée.
- Estimée de Wegner.
- Le régime localisé. La méthode des moments fractionnaires.

Prérequis

Analyse réelle et complexe ; analyse fonctionnelle.

Bibliographie

– Werner Kirsch. An invitation to random Schrödinger operators. In Random Schroedinger operators. *volume 25 de Panor. Syntheses, pages 1-119. Soc. Math. France, Paris, 2008.*

– Leonid Pastur and Alexander Figotin. Spectra of random and almost-periodic operators. *volume 297 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1992*

Contact : frederic.klopp@imj-prg.fr

Cours fondamental 1

Introduction aux systèmes dynamiques

Patrice Le Calvez

Notes de cours prévues.

Présentation

Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps. On suppose généralement que la loi d'évolution est déterministe et fixée. La donnée est alors une transformation d'un espace dans lui même, que l'on peut itérer (temps discret, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$), ou alors une équation différentielle, dont la solution est un flot (temps continu, $\mathbb{R}$). De nombreux exemples intéressants viennent de la physique (mécanique, notamment étude du système solaire, mécanique statistique, ...), mais aussi de l'informatique, la chimie, la biologie... L'évolution pour des temps longs est souvent compliquée, donc difficile (impossible en pratique!), à prédire de façon exacte ("chaos", "effet papillon"). Cependant, divers outils permettent de décrire cette évolution de façon qualitative, notamment probabiliste, pour des classes de dynamiques assez vastes pour inclure des modèles intéressants.

Nous introduirons dans ce cours les notions de base ainsi que les exemples classiques des systèmes dynamiques.

Contenu

- Dynamique topologique
- Introduction à la théorie ergodique, théorèmes ergodiques (Von Neumann, Birkhoff)
- Théorie spectrale
- Homéomorphismes du cercle (nombre de rotation de Poincaré, théorème de Denjoy)
- Entropie métrique, entropie topologique.

Prérequis

Topologie, théorie de la mesure, analyse réelle.

Bibliographie

- M. Brin et G. Stuck. Introduction to dynamical systems. *Cambridge University Press, 2002.*
- P. Walters. An introduction to ergodic theory. *Graduate text in Mathematics, Springer-Verlag.*
- A. Katok et B. Hasselblatt. Introduction to he modern theory of dynamical systems. *Cambridge University Press.*

Contact : `lecalvez@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Introduction à la théorie des schémas

François Loeser (Travaux dirigés par Mathieu Florence (à confirmer))

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours exposera les bases de la théorie des schémas

Contenu

- Schémas: définitions de base et exemples
- Morphismes séparés, propres
- Différentielles
- Morphismes plats, lisses
- Caractérisation cohomologique des schémas affines
- Finitude de la cohomologie des faisceaux cohérents dans le cas projectif

Prérequis

Une certaine familiarité avec l'algèbre commutative, l'algèbre homologique et la théorie des faisceaux

Bibliographie

- Robin Hartshorne. Algebraic Geometry. *Springer GTM*
- Antoine Ducros. Introduction Ã la théorie des schémas. *http://webusers.imj-prg.fr/ antoine.ducros/polym2.pdf*

Contact : `francois.loeser@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Topologie algébrique

Alexandru Oancea

Le polycopié du cours 2016-2017 est disponible à l'adresse
`https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M2-TOPO-ALG/topo-alg-2016.html`
et évoluera au courant de l'année 2017-2018.

Présentation

La topologie algébrique fait le lien entre la géométrie et l'algèbre. L'on se propose de distinguer des objets topologiques en leur associant des invariants de nature algébrique (nombres entiers, groupes, anneaux, modules ...) Les idées et images issues de la topologie algébrique irriguent l'ensemble des mathématiques modernes.

Le but de ce cours est d'approfondir les notions d'homologie et de cohomologie à travers l'étude des variétés et des fibrés vectoriels.

Les variétés lisses sont des objets d'une importance centrale en topologie et géométrie. Les fibrés vectoriels modélisent la donnée d'informations supplémentaires de nature infinitésimale le long de la variété base. Les deux thèmes phare que nous allons poursuivre dans ce cours sont la dualité de Poincaré et la théorie des classes caractéristiques. Nous allons développer cette dernière en mettant l'accent sur le point de vue de la théorie de l'obstruction.

Contenu

- Homologie et cohomologie singulière. Propriétés. Opérations. Points de vue simplicial et cellulaire. Calculs.
- Classe fondamentale. Dualité de Poincaré. Coefficients tordus.
- Classes caractéristiques : Euler, Stiefel-Whitney, Chern, Pontryagin.
- Groupes d'homotopie d'ordre supérieur. Théorie de l'obstruction.
- Cohomologie des grassmanniennes et point de vue axiomatique sur les classes caractéristiques

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de topologie algébrique de niveau M1. Il est fortement conseillé d'avoir suivi le cours introductif de géométrie différentielle M2. Il sera utile d'avoir suivi le cours introductif de topologie différentielle M2 de Paris 7.

Bibliographie

- Allen Hatcher. Algebraic topology. *Cambridge Univ. Press* `https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`
- Allen Hatcher. Vector bundles and K-theory. `https://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf`
- Glen Bredon. Geometry and topology. *Springer*
- John Milnor, Jim Stasheff. Characteristic classes. *Princeton Univ. Press*
- Henri Paul de Saint Gervais. Analysis situs. Topologie algébrique des variétés. `http://analysis-situs.math.cnrs.fr`
- Frédéric Paulin. Topologie algébrique élémentaire. `http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf`

Contact : `alexandru.oancea@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Géométrie et théorie des représentations II

Eric Vasserot

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est d'abord d'introduire quelques notions de base en théorie de Lie (algèbres de Lie réductives, systèmes de racines, représentations de plus haut poids, groupes algébriques). Ensuite on donnera quelques outils de géométrie algébrique qui sont fondamentaux pour la théorie des représentations (variétés de drapeaux, cellules de Bruhat,...). Si on en a le temps, le théorème de localization de Beilinson-Bernstein sera évoqué en fin de cours.

Contenu

- algèbres de Lie réductives
- systèmes de racines
- représentations de plus haut poids
- groupes algébriques
- variétés de drapeaux
- décomposition de Bruhat

Prérequis

Cours "Géométrie et théorie des représentations I". Quelques notions de géométrie algébrique sont conseillées pour la seconde partie du cours.

Bibliographie

- Humphreys . Introduction to Lie algebras and Representation Theory.
- Chriss et Ginzburg . Representation theory and complex geometry.
- Borel . Linear algebraic groups.
- Humphreys . Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category O.

Contact : eric.vasserot@imj-prg.fr

Cours fondamental 2

Introduction aux faisceaux pervers

Antoine Chambert-Loir (Travaux dirigés par Olivier Dudas)

Notes de cours :
`https://webusers.imj-prg.fr/~antoine.chambert-loir/enseignement/2017-18/pervers/index.xhtml`.

Présentation

Les propriétés homologiques des variétés algébriques lisses sont particulièrement remarquables (dualité, notamment). La cohomologie d'intersection et les faisceaux pervers ont été introduits au début des années 80 par Goresky/MacPherson et Beilinson/Bernstein/Deligne/Gabber pour permettre d'étudier agréablement les variétés singulières.

Dans ce cours, qui se veut une introduction à la théorie des faisceaux pervers, l'accent sera mis sur la compréhension des outils catégoriques et homologiques nécessaires à leur définition dans le cadre de la géométrie complexe.

Ces notions seront parallèlement illustrées en TD.

Immédiatement après leur définition, les faisceaux pervers ont trouvé une application en théorie des représentations où il est nécessaire de comprendre la géométrie de certaines variétés singulières (cône nilpotent par exemple). On verra ainsi dans la seconde partie du cours (par Emmanuel Letellier) comment certains faisceaux pervers (faisceaux caractères introduits par Lusztig) permettent de construire géométriquement les caractères des groupes réductifs sur des corps finis.

Contenu

- Catégories triangulées
- Cohomologie des faisceaux, 6 opérations
- T-structures
- Faisceaux pervers

Prérequis

Théorie des faisceaux, théorie élémentaire des catégories, algèbre homologique élémentaire, topologie algébrique élémentaire (revêtements, groupe fondamental, homologie et cohomologie singulière), notions de géométrie algébrique.

Bibliographie

– S. Mac Lane. Categories for the working mathematician. *Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1971)*

– M. Kashiwara, P. Schapira. Categories and sheaves. *Grundlehren der math. Wissenschaften, vol. 332 (2006), Springer-Verlag*

– S. Gelfand, Yu. Manin. Methods of homological algebra. *Springer Monographs in Mathematics (2003), Springer-Verlag*

– B. Iversen. Cohomology of sheaves. *Universitext, Springer-Verlag (1986)*

– A. Neeman. Triangulated categories. *Annals of math. studies, vol. 148, Princeton University Press (2001)*

– A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne. Faisceaux pervers. *Astérisque, no. 100 (1981), Soc. math. France*

Contact : `antoine.chambert-loir@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Théorie des modèles des groupes affines I

Adrien Deloro

Notes de cours : `https://webusers.imj-prg.fr/~adrien.deloro/index.php?topic=teaching`.

Présentation

Le but de ce cours (en deux parties) est de montrer en quoi la théorie des modèles, c'est-à-dire le versant mathématique de la logique, est un langage pertinent pour l'étude des groupes algébriques.

La première partie présentera divers phénomènes géométriques (élimination, transfert) sous l'angle modèle-théorique, avant d'embrayer sur une invitation aux groupes de rang de Morley fini, vaste généralisation logique des groupes algébriques affines.

Contenu

- Notions modèle-théoriques : parties définissables, compacité
- Corps algébriquement clos : élimination des quantificateurs et des imaginaires
- Ultraproduits ; principes de transfert
- Fonction de rang ; groupes rangés
- Corps rangés (en théorie des modèles)
- Théorèmes de Zilber

Prérequis

Aucun prérequis logique. Mais prérequis algébriques : il est indispensable de bien savoir ce qu'est une base de transcendance, un groupe résoluble, etc. Il n'est pas indispensable de suivre un cours de géométrie algébrique.

Bibliographie

– Bruno Poizat. Groupes stables. *Nur al-mantiq wal-ma'rifah, Lyon, 1987, ISBN 2-9500919-1-1 ; traduit en anglais en Stable Groups. Math. Surveys Monogr., vol. 87, Amer. Math. Soc., Providence, 2001, ISBN 0-8218-2685-0*

– David Marker. Model Theory – an Introduction. *Graduate Texts in Mathematics, 217. Springer-Verlag, New York, 2002, ISBN 0-387-98760-6*

– Alexandre Borovik, Ali Nesin. Groups of finite Morley rank. *Oxford Logic Guides, 26, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994, ISBN 0-19-853445-0*

– James Humphreys. Linear Algebraic Groups. *Graduate Texts in Mathematics, 21, Springer-Verlag, New York, 1975, ISBN 978-1-4684-9445-7*

Contact : `adrien.deloro@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Théorie de l'intersection

Antoine Ducros

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le célèbre théorème de Bezout en géométrie projective assure que sur un corps de base algébriquement clos, l'intersection de deux courbes projectives planes de degrés respectifs d et d' sans composante irréductible commune comporte exactement dd' points, *à condition de les compter avec multiplicités.*

On peut considérer ce type de résultat comme le point de départ de la *théorie de l'intersection*, qui joue un rôle majeur dans toutes les déclinaisons de la géométrie algébrique (complexe, arithmétique...) ; elle vise à étudier en toute généralité l'intersection de deux sous-variétés d'une variété donnée, les notions de multiplicité qui y sont associées, la façon dont l'intersection varie lorsqu'on "fait bouger" ces sous-variétés...

Le but de ce cours est de présenter les bases de cette théorie, en suivant pour l'essentiel le livre remarquable de Fulton.

Contenu

– Cycles, diviseurs de Weil et de Cartier, fibrés en droite, diviseur d'une fonction, équivalence rationnelle.

– Éclatements. Intersection d'un cycle avec un diviseur de Cartier, commutativité dans le cas de deux diviseurs de Cartier.

– Fibrés vectoriels et projectifs, classes de Segre et de Chern.

– Déformation au cône normal.

– Intersection d'un cycle avec un sous-schéma régulièrement immergé. Théorie de l'intersection sur une variété lisse.

Prérequis

Nous supposerons acquise une bonne connaissance des bases de la géométrie algébrique, même si quelques rappels pourront être faits en cours. Quelques références sur le sujet : chapitre I et II du Hartshorne, cours fondamental I de F. Loeser, mon polycopié de théorie des schémas...

Bibliographie

– William Fulton. Intersection Theory.

Contact : `antoine.ducros@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Méthode de Nash-Moser et EDP non-linéaires

David Gerard-Varet

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

L'objet du cours est une méthode remarquable introduite par Nash et développée par Moser, visant à résoudre des EDO ou des EDP non-linéaires. Cette méthode a été appliquée avec succès à différents problèmes d'analyse et de géométrie: plongement isométrique des variétés, conjugaison des difféomorphismes du cercle, théorème KAM, amortissement Landau... Le but de la première partie du cours sera de présenter cette méthode, et certaines de ses applications les plus connues. Dans une seconde partie, nous nous intéresserons à son apport à la théorie des EDP, et son lien avec des problèmes ou notions connexes (régularité des solutions d'équations elliptiques, paraproduit).

Contenu

- Rappels sur les méthodes de point fixe
- Méthode de Nash-Moser : cadre analytique
- Application à la conjugaison des difféomorphismes du cercle
- Méthode de Nash-Moser : cadre C^k ou Sobolev
- Lien avec les EDP

Prérequis

Le cours ne nécessite pas d'autres prérequis que les cours d'analyse classiques de L3/M1 (calcul différentiel, analyse de Fourier, espaces de Banach). Avoir quelques notions sur les EDP (notamment sur les solutions faibles d'EDP elliptiques) peut aider dans la seconde partie du cours, mais n'est pas indispensable.

Bibliographie

- T. Tao . The Nash-Moser iteration scheme. `https://www.math.ucla.edu/~tao/`
- C.E. Wayne. An introduction to KAM theory. `http://math.bu.edu/people/cew/Overview.html`
- S. Alinhac, P. Gerard. Opérateurs pseudo-différentiels et Théorème de Nash-Moser. *EDP Sciences*
- Q. Han, F. Lin. Elliptic partial differential equations. *Courant Lecture Notes, AMS*

Contact : `david.gerard-varet@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Introduction à l'homotopie

Grégory Ginot

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est de donner une introduction à la théorie de l'homotopie moderne et à ses outils et applications. On suivra essentiellement deux exemples, celui, fondateur, des espaces topologiques et celui des complexes (au sens des cours d'algèbre homologique et topologie algébrique). On présentera l'axiomatique moderne de l'homotopie, les catégories de modèles de Quillen, et on expliquera l'équivalence entre les espaces topologiques et les ensembles simpliciaux. On illustrera aussi ces méthodes via l'exemple de l'homotopie rationnelle pour montrer comment les structures multiplicatives des cochaines (singulières ou de De Rham) encodent les espaces à homotopie près.

Contenu

- Groupes d'homotopie supérieures des espaces topologiques, fibrations de Serre, CW-complexes
- Complexes de chaines, homotopie des complexes
- Catégories de modèles
- Foncteurs de Quillen et dérivés
- Comparaison des ensembles simpliciaux et espaces topologiques
- Homotopie rationnelle

Prérequis

Avoir suivi une introduction à la topologie algébrique (homologie singulière, simpliciale ou de De Rham, groupe fondamental) est fortement conseillée. Il pourra être utile d'avoir suivi un cours introductif d'algèbre homologique.

Bibliographie

- Chuck Weibel. An itroduction to Homological Algebra. *Cambridge studies*
- Mark Hovey. Model Categories. *AMS*
- Jacob Lurie. Higher Topos Theory. *Annals of mathematical Studies* `http://www.math.harvard.edu/~lurie/`
- Kathryn Hess. Rational Homotopy Theory: A Brief Introduction. `http://arxiv.org/abs/math/0604626`
- Glen Bredon. Topology and Geometry. *Springer*

Cours fondamental 2

Introduction à la combinatoire additive

Timothy Gowers

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Additive Combinatorics is a branch of mathematics with roots in combinatorics, additive number theory, harmonic analysis, and ergodic theory. This course will cover some of the most important results in the area, such as Roth's theorem on arithmetic progressions, Szemeredi's regularity lemma, and Ruzsa's proof of Freiman's theorem. However, the emphasis will be more on the techniques of proof than on the results themselves.

Cours fondamental 2

Variétés des caractères et structures hyperboliques en dimension 3

Antonin Guilloux

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Le but de ce cours est de présenter une étude des variétés de dimension 3 à travers la variété des caractères du groupe fondamental et la recherche de structures hyperboliques. Un exemple fondamental de variété sera les complémentaires de noeud dans la sphère S^3.

L'approche sera concrète et effective, à travers une première étape de triangulation des variétés, pour avoir un modèle combinatoire, qui emmène vers une reformulation algébrique de la variété des caractères (espaces des représentations du groupe fondamental vers $SL(2, \mathbb{C})$ modulo conjugaison) et du problème d'existence de structure hyperbolique.

Parmi les objectifs de ce cours figurent le théorème de chirurgies de Dehn hyperboliques de Thurston, et l'étude du volume des variétés hyperboliques de dimension 3 dûe à Neumann-Zagier

Ce cours parcourt des notions maintenant classique et peut servir d'introduction à la géométrie hyperbolique et aux variétés de caractères. Les travaux dirigés illustreront l'étude faite en cours et en montreront l'aspect effectif.

Contenu

- Géométrie et topologie des variétés hyperboliques de dimension 3
- Variétés de caractères

Prérequis

Bibliographie

– W. Thurston. Geometry and topology of 3 manifolds. `http://library.msri.org/books/gt3m/`

– W. Neumann et D. Zagier. Volumes of hyperbolic three-manifold. *Topology, 24 (1985), pp. 307–332*

Contact : `antonin.guilloux@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Cohomologie étale

François Loeser (Travaux dirigés par Mathieu Florence (à confirmer))

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Après avoir exposé en détail les bases de la topologie étale et de la cohomologie étale, on en présentera les principaux théorèmes (changement de base lisse, dualité de Poincaré, formule de Lefschetz). On conclura avec l'énoncé des conjectures de Weil.

Contenu

- Morphismes étales
- Le groupe fondamental étale
- Faisceaux étales et cohomologie étale
- Cohomologie étale des courbes
- Les grands théorèmes
- Les conjectures de Weil

Prérequis

Cours de théorie des schémas, familiarité avec la cohomologie des faisceaux.

Bibliographie

- James Milne. Lectures on etale cohomology. *references* `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/LEC.pdf`
- James Milne. Etale cohomology. *Princeton University Press*
- Eberhard Freitag, Reinhardt Kiehl. Etale cohomology and the Weil conjecture. *Springer Verlag*

Contact : `francois.loeser@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Variétés hamiltoniennes et quantification géométrique

Xiaonan Ma

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Ce cours est une introduction sur la géométrie symplectique et l'action de groupe sur les variétés. Le concept central est l'application moment associée à une action d'un groupe sur une variété symplectique. Je vais présenter aussi des applications variées reliée à l'application moment: localisation, quantification géométrique, théorie de représentation, Théorie géométrique des invariants etc

Contenu

– Variétés symplectiques, Variétés Hamiltoniennes, Théorème de Darboux

– les groupes de cohomologie d'un groupe de Lie et de son algèbre de Lie

– L'application moment et réduction symplectique, Convexité de l'application moment.

– Cohomologie équivariante et classes caractéristiques

– Image de la mesure de Liouville par l'application moment et volumes des espaces réduits.

– Prequantifcation, action et moment, Théorie géométrique des invariants et la réduction symplectique

Prérequis

Variétés différentielles.

Bibliographie

– Xiaonan Ma. Hamiltonian manifolds and geometric quantizations.. *Poly de mon cours*

– Cannas da Silva, Ana, . Lectures on symplectic geometry.. *Lecture Notes in Mathematics, 1764.* Springer-Verlag,Berlin,2001.xii+217pp

– V. Guillemin, S. Sternberg, . Symplectic techniques in physics. Second edition.. *Cambridge University Press, Cambridge, 1990. xii+468 pp.*

Contact : xiaonan.ma@imj-prg.fr

Cours fondamental 2

Courbes elliptiques

Benoît Stroh

Notes de cours : https://webusers.imj-prg.fr/~benoit.stroh/.

Présentation

Les courbes elliptiques sont le premier exemple non évident de courbes algébriques propres et lisses. Elles permettent ainsi d'illustrer agréablement des notions générales de géométrie algébrique. Mais elles donnent surtout naissance à une riche théorie arithmétique, qui intervient par exemple dans la démonstration par Wiles du théorème de Fermat. Nous étudierons plusieurs aspects de l'arithmétique des courbes elliptiques.

Contenu

- Loi de groupe et théorème de Riemann-Roch
- Points de torsion et module de Tate
- Bonne et mauvaise réduction
- Multiplication complexe
- Théorème de Mordell-Weil

Prérequis

Cours "Géométrie algébrique I" et cours "Introduction aux surfaces de Riemann".

Bibliographie

– J. Nekovar. Elliptic functions and elliptic curves. https://webusers.imj-prg.fr/~jan.nekovar/co/ln/el/el1.pdf

– J. Silverman. The arithmetic of elliptic curves. *Graduate Texts in Mathematics 106, Springer*

– B. Stroh. Courbes elliptiques. https://webusers.imj-prg.fr/~benoit.stroh/elliptique.pdf

Contact : benoit.stroh@imj-prg.fr

Cours fondamental 2

Géométrie et dynamique

Anton Zorich

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est de montrer les liens entre la géométrie et la dynamique en prenant comme exemple de base la géométrie hyperbolique élémentaire. Je compte introduire des notions importantes de dynamique à travers des liens entre les géodésiques dans le demi-plan hyperbolique et les fractions continues. A la fin du cours, je compte amener les étudiants à la compréhension de certaines idées des résultats contemporains de Eskin, Kontsevich, Masur et Mirzakhani qui sont rarement abordés dans les cours de M2. Je vais essayer d'accorder le contenu avec Bertrand Deroin pour que ce cours puisse servir de préparation à son cours plus avancé.

En revanche, le cours ne touchera pas la plupart des aspects de la théorie ergodique classique (en particulier, le théorème ergodique sera présenté sans preuve). Plusieurs sujets fondamentaux en systèmes dynamiques ne seront pas évoqués du tout. Donc ce cours ne peut pas remplacer un cours classique en systèmes dynamiques mais peut servir de bon complément avec beaucoup d'illustrations en applications géométriques.

Prérequis

Bibliographie

– A. Zorich. The Work of Maryam Mirzakhani. *Notices of the AMS, Vol 62 issue 11, pp. 1345-1349*

Contact : `zorich@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Les surfaces K3

Olivier DEBARRE

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

La géométrie algébrique est l'étude des ensembles définis des équations polynomiales (en plusieurs variables) à coefficients dans un corps, appelés variétés affines. On considère aussi les sous-ensembles des espaces projectifs définis par des équations polynomiales homogènes, de façon à obtenir des objets « compacts », les variétés projectives. Dès qu'on a défini les concepts de dimension et de lissité, on peut entamer un travail de classification (à isomorphisme près) des variétés projectives lisses connexes de dimension donnée, sur un corps fixé qui sera pour nous le corps des complexes. En dimension 1, on appelle ces variétés des courbes et un élément essentiel de leur classification est leur genre, un entier positif. Dès la dimension 2, la classification demande plus de travail mais est maintenant bien comprise depuis des décennies.

Nous nous intéresserons dans ce cours à un type de surfaces bien particulier, appelées surfaces K3 (ainsi nommées par André Weil « à cause de Kummer, Kähler, Kodaira et de la belle montagne K2 au Cachemire »). Elles occupent une place bien particulière dans la classification : assez spéciales pour qu'on puisse les décrire précisément (classification de Mukai en petits degrés), mais suffisamment diverses pour garder suffisamment de propriétés (géométriques, dynamiques, arithmétiques) importantes pas encore toutes élucidées.

Travailler sur le corps des nombres complexes nous permettra d'utiliser les outils de la géométrie complexe, comme la théorie de Hodge et l'application des périodes, qui sont fondamentaux pour l'étude des surfaces K3.

Une certain familiarité avec les concepts de base de la géométrie algébrique ou complexe sera nécessaire mais je m'adapterai à l'auditoire. Les surfaces K3 seront le fil conducteur du cours mais j'en profiterai bien entendu pour introduire les divers outils classiques utilisés dans l'étude des surfaces algébriques. Ce cours, qui aura lieu à l'École normale supérieure, pourra constituer une introduction au cours qui sera donné par Claire Voisin au Collège de France sur les variétés hyperkählériennes, une généralisation des surfaces K3 en toute dimension paire.

Contenu

- Variétés complexes
- Surfaces K3
- Décomposition de Hodge
- Application des périodes
- Variétés algébriques

Prérequis

Cours introductif à la géométrie algébrique complexe

Bibliographie

– Barth, Wolf; Hulek, Klaus; Peters, Chris; Van de Ven, Antonius. Compact complex surfaces. *Second edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 4,* *Springer-Verlag, Berlin, 2004*

– Beauville, Arnaud. Surfaces algébriques complexes. *Astérisque 54, Société Mathématique de France, Paris, 1978*

– Beauville, Arnaud. Surfaces K3. *Séminaire Bourbaki, 217-229, Astérisque 105-106, Société Mathématique de France, Paris, 1983*

– Huybrechts, Daniel. Lectures on K3 surfaces. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics 15, Cambridge University Press, Cambridge, 2016*

– Voisin, Claire. Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe. *Cours Spécialisés 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002*

Contact : `olivier.debarre@ens.fr`

Cours spécialisé

Théorie des modèles des groupes affines II

Adrien Deloro

Notes de cours : `https://webusers.imj-prg.fr/~adrien.deloro/index.php?topic=teaching`.

Présentation

Le but de ce cours (en deux parties) est de montrer en quoi la théorie des modèles, c'est-à-dire le versant mathématique de la logique, est un langage pertinent pour l'étude des groupes algébriques.

Cette seconde partie exposera des applications aux groupes algébriques avant de s'orienter vers des questions (ouvertes) spécialisées.

Contenu

- Groupes algébriques ; théorème de Weil-Hrushovski
- Équidéfinissabilité ; théorème de Borel-Tits
- Groupes définissablement linéaires
- Groupes de petit rang de Morley
- Groupes de permutations rangés
- Représentations rangées

Prérequis

Il est indispensable d'avoir suivi la première partie du cours.

Bibliographie

– Bruno Poizat. Groupes stables. *Nur al-mantiq wal-ma'rifah, Lyon, 1987, ISBN 2-9500919-1-1 ; traduit en anglais en Stable Groups. Math. Surveys Monogr., vol. 87, Amer. Math. Soc., Providence, 2001, ISBN 0-8218-2685-0*

– David Marker. Model Theory – an Introduction. *Graduate Texts in Mathematics, 217. Springer-Verlag, New York, 2002, ISBN 0-387-98760-6*

– Alexandre Borovik, Ali Nesin. Groups of finite Morley rank. *Oxford Logic Guides, 26, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994, ISBN 0-19-853445-0*

– James Humphreys. Linear Algebraic Groups. *Graduate Texts in Mathematics, 21, Springer-Verlag, New York, 1975, ISBN 978-1-4684-9445-7*

Contact : `adrien.deloro@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Géodésiques fermées simples sur les surfaces hyperboliques

Bertrand Deroin

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Nous nous intéresserons à la distribution des géodésiques fermées simples sur les surfaces, en nous concentrant sur le cas des surfaces fermées à courbure constante -1. Le but du cours est de montrer le théorème suivant de Mirzakhani, publié en 2008 : le nombre de géodésiques fermées simples de longueur inférieure à R est équivalent à cR^{6g-6}, où g est le genre de la surface et où $c > 0$ est une constante. Au passage, nous aurons l'occasion de discuter certaines propriétés géométriques et dynamiques fines de l'espace des modules des courbes de genre g, notamment la structure symplectique de Weil-Peterson, le calcul des volumes des espaces de modules des surfaces hyperboliques à bord géodésiques, les identités de McShane, la géométrie du bord de l'espace de Teichmüller ainsi que l'ergodicité de l'action du groupe modulaire, etc. En particulier, nous expliquerons la démonstration par Mirzakhani de la conjecture de Witten, qui rend possible le calcul de certaines intersections en cohomologie sur l'espace de module des courbes de genre g.

Contenu

– Rudiments de géométrie hyperbolique et de théorie de Teichmüller

– Identités de McShane généralisées

– Volumes des espaces de modules de surfaces hyperboliques à bord géodésique

– Conjecture de Witten

– Théorème de Masur : ergodicité du groupe modulaire sur le bord de Thurston de l'espace de Teichmüller

– Asymptotique du nombre de géodésiques fermées simples

Prérequis

Il pourrait être utile, sans être obligatoire, d'avoir suivi le cours d'Anton Zorich. Des rudiments en géométrie et systèmes dynamiques pourront également aider.

Bibliographie

– Peter Buser. Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces.. *Birkhäuser*

– Greg McShane. Simple geodesics and a series constant over Teichmüller space.. *Inventiones Mathematicae, 132 (1998)*

– Myriam Mirzakhani . Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces . *Annals of Mathematics, 168 (2008)*

– Myriam Mirzakhani . Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces. *Inventiones Mathematicae, 167 (2007)*

– Myriam Mirzakhani . Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves. *Journal of the AMS, 20 (2007)*

Contact : `bertrand.deroin@gmail.com`

Cours spécialisé

Invariants géométriques des groupes infinis

Anna Erschler

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Étant donne une action d'un groupe G sur un espace métrique X, on peut étudier la relation entre les propriétés de G et la métrique de X. Un cas important est la situation où G et un groupe de type fini et X est un graphe de Cayley de G. Quelques observations sont immédiates ou faciles à démontrer: par exemple, si G est un produit direct de deux groupes, alors le graphe de Cayley est un produit direct de deux graphes de Cayley associés; si G est un produit libre de deux groupes (de cardinalité au moins 2 et 3), alors "l'espace des bouts" de G est infini; si G possède un sous-groupe libre, alors le graphe de Cayley de G contient un sous-arbre régulier, et sa croissance est exponentielle.

Il est souvent difficile de caractériser les propriétés algébriques en termes de la métrique. La preuve de telles caractérisations peut révéler les liens profonds entre l'algèbre et la géométrie. La métrique d'un graphe de Cayley dépends du choix de générateurs de G, mais pas beaucoup: les graphes de Cayley de (G, S) et (G, S') sont "quasi-isométriques". Un groupe est rigide par rapport aux quasi-isométries si chaque groupe qui est quasi-isométrique à G est commensurable avec G. Une propriété P de groupes est géométrique si chaque groupe qui est quasi-isométrique à un groupe avec la propriété P satisfait aussi cette propriété. Par exemple, on peut démontrer, en utilisant un théorème de Stallings, que les groupes libres sont rigides. C'est un corollaire du théorème de Gromov sur la croissance polynomiale que la propriété d'être nilpotent est géométrique et que les groupes abéliens sont rigides par rapport aux quasi-isométries. Par contre, il y a des propriétés qui ne sont pas géométriques . Par exemple, la construction de Burger et Mozes montre qu'un groupe simple peut être quasi-isométrique à un produit directe de deux groupes libres. Pour d'autres propriétés de groupes, même très basiques, les questions de la géométricité et de la rigidité restent ouvertes. Par exemple, il n'est pas connu si chaque groupe nilpotent est rigide.

Nous allons étudier des invariants quasi-isométriques des groupes : la croissance, l'isopérimétrie, l'hyperbolicité, ainsi que des propriétés asymptotiques de diverses classes de groupes: de groupes nilpotents, de groupes résolubles, de groupes agissants sur des arbres, de groupes à petite simplification et de groupes hyperboliques.

Contenu

– propriétés géométriques, quasi-isométries, croissance, isopérimétrie,

– groupes nilpotents, groupes résolubles, groupes agissants sur des arbres, groupes à petite simplification , groupes hyperboliques.

Prérequis

Bibliographie

– Pierre de la Harpe. Topics in geometric group theory.. *University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.*

– John Meier. Groups, graphs and trees. An introduction to the geometry of infinite groups.. *London Mathematical Society Student Texts, 73. Cambridge University Press, Cambridge, 2008*

– Etienne Ghys, Pierre de la Harpe. Sur les groupes hyperboliques d'aprÃ¨s Mikhael Gromov,Â . *Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988, Progress in Mathematics, 83. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.*

Contact : `anna.erschler@ens.fr`

Cours spécialisé

Espace de drapeaux et variétés de caractères

Antonin Guilloux

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

On se basera sur les idées développées dans le cours "Variété des caractères et structures hyperboliques en dimension 3" pour expliquer comment étudier les variétés de caractères dans des cadres plus généraux. On présentera une approche aux variétés de caractères de variétés de dimension 3 (espace des représentations du groupe fondamental de la variétés dans $SL(n, \mathbb{C})$, modulo conjugaison) à travers les configurations de drapeaux.

Cette approche, qui fait confluer les idées de Thurston-Neumann-Zagier présentées dans le cours précédent avec les idées de Fock-Goncharov, permet une étude précise, à la fois théorique et pratique des variétés de caractères.

Le but de ce cours est de présenter les configurations de drapeaux et leur utilisation pour les variétés de caractères et de présenter quelques résultats récents obtenus par cette approche.

Contenu

- Espaces de configuration de drapeaux
- Variétés de caractères

Prérequis

Cours fondamental 2: Variétés des caractères et structures hyperboliques en dimension 3

Bibliographie

– Bergeron, Falbel, Guilloux. Tetrahedra of flags, volume and homology of SL(3). *Geometry & Topology 18(4)*

– Dimofte, Gabella, Goncharov. K-Decompositions and 3d Gauge Theories.. `http://arxiv.org/pdf/1301.0192.pdf`

Contact : `antonin.guilloux@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Applications des faisceaux pervers en théorie des représentations

Emmanuel Letellier

Notes de cours : https://webusers.imj-prg.fr/~emmanuel.letellier/.

Présentation

Ce cours est une introduction à la théorie des faisceaux-caractères de Lusztig. Les faisceaux-caractères sont des faisceaux pervers sur les groupes algébriques réductifs G qui permettent de retrouver les caractères irréductibles complexes du groupe des points rationnels de G sur un corps fini via le dictionnaire faisceaux-fonctions. Cette théorie très puissante a permis de résoudre de nombreux problèmes en théorie des représentations.

Contenu

- F_q-structures sur les schémas
- Rappels sur les groupes algébriques
- Faisceaux l-adiques, faisceaux pervers l-adiques, dictionnaire faisceaux-fonctions
- Résolution de Grothendieck/Springer, correspondence de Springer
- Faisceaux-caractères unipotents
- Liens avec les représentations des groupes réductifs finis

Prérequis

Introduction aux faisceaux pervers, groupes algébriques, géométrie algébrique

Bibliographie

- T. A. Springer. Linear Algebraic Groups. *Progress in Math.*
- F. Digne et J. Michel. Representations of finite groups of Lie type. *LMS, Student Texts 21*
- J. S. Milne. Etale cohomology. *Princeton University Press*
- A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne . Faisceaux pervers. *Astérisque 100*
- T. Shoji. Geometry of orbits and Springer correspondence. *Astérisque 168, 61-140.*

Contact : emmanuel.letellier@imj-prg.fr

Cours spécialisé

Espaces adiques et espaces perfectoïdes

Matthew Morrow

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est d'introduire l'approche de Huber à la géométrie analytique rigide en termes d'espaces adiques, qui étend la théorie des schémas à une grande classe d'anneaux topologiques. Un cas particulier est les espaces perfectoïdes introduits par Scholze en 2011, qui jouent un rôle fondamental dans beaucoup de progrès récents en géométrie arithmétique p-adique.

Contenu

- Espaces adiques
- Espaces perfectoïdes

Prérequis

Familiarité avec la géométrie algébrique, par exemple les schémas, les espaces localement annelés et les faisceaux.

Bibliographie

– Bhargav, Bhatt. Lecture notes for a class on perfectoid spaces. `http://www-personal.umich.edu/~bhattb/teaching/mat679w17/lectures.pdf`

– Huber, Roland. Etale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces. `https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-663-09991-8`

– Scholze, Peter. Perfectoid Spaces. `http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/`

– Weinstein, Jared. Peter Scholze's lectures on p-adic geometry. `http://math.bu.edu/people/jsweinst/`

Contact : `matthew.morrow@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Autour de la stabilité de l'espace-temps de Minkowski

Jeremie Szeftel

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est d'introduire les outils mathématiques nécessaire à la preuve de la stabilité de l'espace-temps de Minkowski.

Après des préliminaires sur l'équation d'onde linéaire, puis sur l'existence locale pour l'équation des ondes non linéaire, je montrerai l'existence et l'unicité locale pour les équations d'Einstein (après les avoir introduites). Puis je parlerai d'existence globale et de comportement asymptotique pour l'équation des ondes non linéaire. Je terminerai par la stabilité de l'espace-temps de Minkowski pour les équations d'Einstein.

Contenu

- Equations d'onde linéaire et non linéaire
- Equation d'Einstein
- Méthode des champs de vecteurs
- Inégalité de Klainerman Sobolev
- Condition nulle et faible nulle

Prérequis

Connaissances de base concernant l'analyse fonctionnelle et les variétés différentielles. Aucune connaissance concernant l'équation des ondes, la géométrie Riemannienne et Lorentzienne, et les équations d'Einstein n'est nécessaire pour suivre le cours.

Bibliographie

- C.D. Sogge . Lectures on Non-Linear Wave Equations. *Second edition. International Press of Boston, 2008.*
- D. Christodoulou et S. Klainerman. The global nonlinear stability of the Minkowski space. *Princeton Mathematical Series 41. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. x+514 pp.*
- H. Lindblad et I. Rodnianski. Global existence for the einstein vacuum equations in wave coordinates.. *Commun. Math. Phys., 256, 2005. pp. 43–110*

Contact : `jeremie.szeftel@upmc.fr`

Cours spécialisé

Variétés hyperkählériennes

Claire Voisin

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ces variétés sont les généralisations naturelles des surfaces K3. Comme pour les tores complexes, ces variétés existent naturellement dans le cadre kählérien compact mais celles qui sont projectives et relèvent donc de la géométrie algébrique sont denses dans l'espace de modules. Si on se restreint aux variétés hyper-kählériennes projectives, leur étude est liée (par l'étude des espaces de modules via l'application des périodes) aux variétés de Shimura et aux formes automorphes.

Le cours introduira les résultats de théorie de Hodge et de théorie des déformations nécessaires pour montrer que les déformations des variétés kählériennes compactes à fibré canonique trivial (en particulier les variétés hyper-kählériennes) sont non-obstruées et que l'application des périodes est un isomorphisme local sur le domaine des périodes. On construira ensuite la forme de Beauville-Bogomolov dont l'existence est une propriété topologique remarquable de ces variétés et on énoncera différentes versions des théorèmes de Torelli. Outre la théorie de Hodge, les deux aspects suivants du sujet seront abordés :

- Géométrie différentielle complexe : Métriques de Kähler-Einstein, structure quaternionique, et twistor lines.
- Géométrie algébrique : Construction de variétés hyper-Kählériennes et étude de leur classe de déformation.

Prérequis

Géométrie et topologie différentielles de base, rudiments de géométrie et d'analyse complexes, cohomologie des faisceaux et notions de théorie des schémas.

Bibliographie