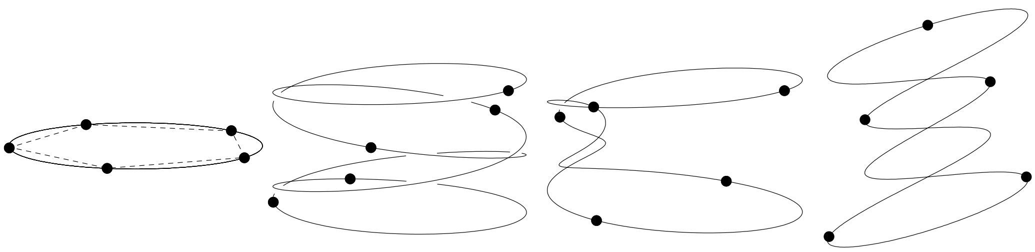
Université Pierre et Marie Curie (Paris vi)

Master de Sciences et Technologie
Mention Mathématiques et Applications

M2 de Mathématiques fondamentales

Année universitaire 2016–2017

Responsables : Elisha Falbel et Ilia Itenberg



Secrétariat : Mme L. Dreyfuss

Campus de Jussieu, 1er étage, couloir 15-25, bureau 1.09
4, place Jussieu, 75005 Paris

Tél & Fax : 01 44 27 85 45
Mél : master.math.fond@upmc.fr
Url : http://mathfond.math.upmc.fr/

Table des matières

1 Le M2 de Mathématiques fondamentales

La spécialité *Mathématiques fondamentales* est une option de la mention *Mathématiques et Applications* du *Master de Sciences et Technologie* de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Elle s'adresse aux étudiants titulaires d'un M1 de mathématiques ou d'un titre équivalent et comprend deux parcours : "Mathématiques Recherche" et "Mathématiques avancées".

Un large spectre des mathématiques fondamentales est généralement couvert, avec des variations selon les années : théorie des nombres, géométrie algébrique, théorie de Lie, topologie, géométries analytique et différentielle, systèmes dynamiques, analyse fonctionnelle, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles, etc.

Parcours "Mathématiques Recherche"

Ce parcours, assez exigeant, s'adresse à tous les étudiants se destinant à un doctorat en Mathématiques fondamentales. Une fois ce doctorat accompli, les débouchés naturels sont les métiers de la recherche et de l'enseignement supérieur, au CNRS, à l'université ou dans les centres de recherche des grandes entreprises. Ces diplômes devraient aussi être un gage de puissance et de créativité intellectuelles suffisant pour intéresser les entreprises de haute technologie, comme c'est déjà le cas pour des diplômes équivalents en Allemagne, au Royaume Uni et aux Etats-Unis.

Parcours "Mathématiques Avancées"

Ce parcours, plus abordable, intéressera les étudiants dont le but principal est de valider le Master, sans poursuivre en doctorat. Les cours proposés sont essentiellement les mêmes que pour le parcours "Recherche", mais les règles de validation sont assouplies, et il est aussi possible de valider certains cours de M1 avancés.

Les détails des règles permettant de valider l'un ou l'autre des parcours se trouvent sur la page "Organisation" de cette brochure.

2 Organisation et déroulement du M2

Comme tout M2, le cursus comprend des *cours* et un *stage*. Les règles de validation dépendent du parcours envisagé.

Les cours se répartissent en 4 périodes de 6 semaines, regroupées de la façon suivants :

- cours d'introduction de 24 heures sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours fondamentaux I et II, de 24 heures plus 12 heures de TD, sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours spécialisés, en général de 24h sur 6 semaines (9 ECTS chacun).

En règle générale, la validation de chaque cours est conditionnée par la réussite à un examen écrit qui se tient à la fin de l'enseignement concerné. Une session de rattrapage pourra être organisée en juin, si nécessaire : les étudiants intéressés par un rattrapage devront contacter directement les enseignants. Pour les cours spécialisés, la validation peut prendre d'autres formes : examen oral, mini-mémoire de synthèse sur un thème connexe, etc.

Voici les règles de validation des deux parcours.

Parcours "Mathématiques Recherche"

Les cours (36 ECTS)

Les étudiants doivent valider 4x9=36 ECTS de cours, dont au plus 18 ECTS en cours introductifs et au moins 9 ECTS en cours fonda 2 ou spécialisé. Il est possible de valider des crédits de cours d'autres universités (Paris 7, Orsay...) après accord des responsables du M2, qui vérifieront notamment la cohérence du choix.

Le stage (21 ECTS)

Il consiste en un travail personnel de compréhension, d'explication et de synthèse d'un ou plusieurs articles de recherche, conclu par la rédaction d'un mémoire et une soutenance devant un jury. Le sujet du mémoire est bien souvent, mais pas nécessairement, un tremplin vers le futur sujet de thèse.

Il est conseillé de prospecter pour un directeur de stage potentiel dès que l'on est sûr de son sujet de prédilection. Fin mars semble être une limite raisonnable.

La date de soutenance du mémoire sera fixée en accord avec le directeur de recherche et les membres du jury. *Attention :* les étudiants qui désirent candidater à un **Contrat Doctoral** auprès de l'Ecole Doctorale devront avoir soutenu leur mémoire *avant fin juin.* Pour les autres, la limite ordinaire est *fin septembre.*

Les 3 ECTS d'ouverture

Ils consistent en l'apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Parcours “Mathématiques Avancées”

Les cours (36 ECTS)

Les étudiants doivent valider 36 ECTS sous la forme de cours. Outre les cours du M2, il est possible de valider certains cours du second semestre de M1, dont le niveau est intermédiaire entre M1 et M2. Il faudra pour cela demander l’accord d’un responsable qui s’assurera que

- le cours concerné n’a pas déjà été validé en M1,
- son contenu n’est pas inclus dans celui d’un cours de M2 déjà validé.

Par ailleurs, le nombre d’ECTS ainsi acquises est limité à 18.

Voici la liste des cours de M1 éligibles, dont on trouvera aussi une description sur la brochure générale du Master.

- Groupes et algèbres de Lie (6 ECTS)
- Introduction aux surfaces de Riemann (6 ECTS)
- Topologie algébrique (6 ECTS)
- Théorie analytique des équations différentielles ordinaires (6 ECTS)
- Équations aux dérivées partielles (12 ECTS)
- Histoire des mathématiques (6 ECTS)

Le stage (21 ECTS)

Il est similaire à celui du parcours Recherche. Le sujet du mémoire pourra cependant être plus adapté au projet de l’étudiant, notamment si celui-ci se destine à l’agrégation.

Les 3 ECTS d’ouverture

Ils consistent en l’apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Télé-enseignement

Une possibilité d’enseignement par correspondance est ouverte sur certains cours. Les étudiants par correspondance reçoivent ou téléchargent les polycopiés des cours, passent les examens à l’Université, et correspondent directement avec les enseignants (resp. leur directeur de stage) pour les questions pédagogiques (resp. la préparation de leur mémoire). Certains polycopiés sont disponibles sur les pages web des enseignants.

On consultera le site web du M2 pour des informations à jour concernant les cours disponibles par correspondance.

3 Inscription et candidature

L'inscription au master de Mathématiques fondamentales est réservée aux étudiants titulaires du M1, d'une maîtrise de mathématiques pures, ou d'un diplôme équivalent par décision individuelle d'équivalence du Président de l'Université.

En revanche, l'acceptation n'est pas automatique. Une sélection sera effectuée au vu des résultats obtenus dans les années antérieures. Voici les démarches pour candidater.

Inscription administrative par internet

Obligatoirement remplir un dossier d'inscription administrative via internet sur le site de la scolarité de l'université `http://www.upmc.fr/fr/formations/inscriptions_scolarite.html`. Si ce site est fermé, s'adresser au secrétariat.

Il sera demandé certains renseignements administratifs, après quoi il faudra imprimer le dossier ; de la persévérence peut s'avérer nécessaire ! Un numéro de dossier ainsi qu'un mot de passe vous seront alors attribués, qui permettront de suivre sur ce site l'évolution du statut de votre candidature.

Candidature

Ensuite, constituer un dossier de candidature et le remettre au secrétariat. *Demander au secrétariat la date limite de remise du dossier de candidature* (*courant septembre*).

Ce dossier doit comporter :

- le dossier d'inscription administrative imprimé
- le formulaire de candidature avec photo d'identité (téléchargeable sur le site internet)
- le relevé de notes de M1, délivré par son université d'origine.

Les étudiants ayant des diplômes étrangers doivent fournir en plus :

- la photocopie du programme des cours suivis pendant les quatre années d'études supérieures
- le relevé de notes des quatre années
- la photocopie des diplômes (le Service de la Scolarité en exigera ultérieurement une traduction assermentée ; voir par exemple le site des experts traducteurs `http://www.ceticap.com/`).

Résultats

Dans le cas d'une réponse favorable, l'étudiant recevra une lettre d'acceptation signée par le responsable du parcours. Dans tous les cas, l'avis de la commission sera consultable sur internet.

Bourses

Les étudiants désirant une bourse durant leur année de M2, doivent s'adresser au Bureau des bourses de l'université (campus de Jussieu). Il existe entre autres

- des bourses sur critère universitaire,
- des bourses sur critère social,
- des allocations d'études.

Voir les détails ainsi que les conditions d'attribution (de nationalité, de situation familiale, etc.) sur le site du bureau des bourses `http://www.upmc.fr/fr/vie_des_campus/bourses.html`.

Pour les deux premiers types de bourses ci-dessus il faut déposer une demande entre le 15 janvier et le 30 avril.

Par ailleurs, la Fondation Sciences Mathématiques de Paris offre des bourses d'études à travers son programme "Paris Graduate School of Mathematical Sciences". Consulter `http://www.sciencesmath-paris.fr/pgsm/`.

4 Cours de l'année 2016-2017

Chaque cours a un volume de 24h, sur 6 semaines. Les cours fondamentaux sont doublés par 12h de TD, qui sont assurés par l'auteur du cours (sauf mention du contraire)

Les cours ont généralement lieu sur le campus Jussieu. Certains auront lieu dans les bâtiments Sophie Germain et O. de Gouges de Paris 7.

Cours introductifs (12 septembre – 21 octobre 2016)

P.-H. Chaudouard (P7)	Théorie algébrique des nombres	TN
I. Itenberg	Introduction à la géométrie algébrique	GA, GC
N. Lerner	Éléments d'analyse pour le Master *	HFE
M. Livernet (P7)	Algèbre homologique et topologie algébrique	GT, GA, Lie
M. Maculan	Introduction aux surfaces de Riemann	GC, GT, GC, TN
J. Marché	Géométrie différentielle et riemanienne	GT
H. Mourtada (P7)	Topologie différentielle	GT
E. Vasserot (P7)	Géométrie et théorie des représentations I	GA, Lie

Cours fondamentaux I (7 novembre – 16 décembre 2016)

V. Baladi	Systèmes dynamiques I	Dyn
J. Cao	Géométrie complexe et théorie de Hodge	GC, GA, GT
C. Laurent	Prolongement unique et applications *	HFE
F. Loeser	Algèbre homologique et cohomologie des faisceaux	GA, Lie, TN
A. Minguez	Introduction aux formes modulaires *	TN
A. Oancea	Topologie algébrique	GA, GC, GT, Lie
E. Vasserot (P7)	Géométrie et théorie des représentations II	GA, Lie
C. Voisin (Collège de France)	Topologie des variétés algébriques (cours avancé) du 6 octobre au 8 décembre	GA, GC

Cours fondamentaux II (9 janvier – 17 février 2017)

A. Deloro	Modèles, groupes, modules I * (cours en commun avec le M2 LMFI)	Log
G. Ginot	Introduction à l'homotopie	GT
B. Klingler (P7)	Variations de structures de Hodge	GA
F. Klopp	Théorie spectrale des opérateurs aléatoires	HFE
F. Le Roux	Systèmes dynamiques II *	Dyn
F. Loeser	Introduction aux schémas et à leur cohomologie	GA
B. Stroh	Courbes elliptiques	GA, TN, Lie

Cours spécialisés (6 mars – 28 avril 2017)

A. Deloro	Modèles, groupes, modules II * (cours en commun avec le M2 LMFI)	Log
P. Georgieva	Théorie de Hurwitz	GT, GA, Phy
V. Humilière	Introduction à la topologie symplectique, homologie de Floer	GT, Dyn
B. Klingler (P7)	Modules de Hodge mixtes	GA
M. Lewin	Analyse fonctionnelle et mécanique quantique *	HFE, Phy
M. LIvernet (P7)	Structures à homotopie près	GT, Lie
B. Stroh	Groupes p-divisibles et variétés abéliennes	GA, TN

* Cours pouvant être suivi en télé-enseignement.

GA	Géométrie algébrique	TN	Théorie des nombres	Lie	Groupes et algèbres de Lie
GC	Géométrie complexe	GT	Géométrie et topologie	Dyn	Dynamique
Phy	Physique mathématique	Log	Logique		

HFE Analyse harmonique, analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles

Cours introductif

Théorie algébrique des nombres

Pierre-Henri Chaudouard

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est d'introduire des notions fondamentales en théorie algébrique des nombres.

Contenu

- Étude des corps locaux
- Corps globaux et leurs complétions
- Adèles et Idèles
- Théorie de Fourier sur les adèles
- Thèse de Tate

Prérequis

Notions d'algèbre commutative (modules, anneaux principaux, de Dedekind), théorie de Galois. Quelques notions élémentaires d'analyse complexe et d'analyse de Fourier.

Bibliographie

- J. Cassels, J. Fröhlich. Algebraic number theory.
- S. Lang. Algebraic number theory.
- D. Ramakrishnan, R. Valenza. Fourier Analysis on Number Fields.
- J-P Serre. Corps locaux.
- A. Weil. Basic Number theory.

Contact : pierre-henri.chaudouard@imj-prg.fr

Cours introductif

Introduction à la géométrie algébrique

Ilia Itenberg

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de présenter plusieurs notions et les premiers résultats de la géométrie algébrique en se basant sur beaucoup d'exemples. Conçu dans l'optique de préparer aux cours "Algèbre homologique et cohomologie des faisceaux" (cours fondamental I) et "Introduction aux schémas et à leur cohomologie" (cours fondamental II), ce cours introductif s'adresse à tout étudiant intéressé par la géométrie et l'algèbre.

Contenu

– Courbes algébriques planes (affines et projectives).
– Généralités sur les variétés affines et les variétés projectives.
– Applications régulières et applications rationnelles.
– Points lisses et points singuliers, éclatements.
– Diviseurs.
– Surfaces algébriques.

Prérequis

Une familiarité avec les définitions de base de l'algèbre commutative (anneaux, idéaux, modules...) pourra être utile. Le cours ne suivra pas de livre particulier ; les deux références sont données à titre indicatif.

Bibliographie

– I. Shafarevich. Basic algebraic geometry. *Springer-Verlag, 1994*
– R. Hartshorne. Algebraic geometry. *Graduate texts in math. 52, Springer-Verlag, 1977*

Contact : `ilia.itenberg@imj-prg.fr`

Cours introductif

Eléments d'analyse pour le master

Nicolas Lerner

Notes de cours : `http://www.math.jussieu.fr/ lerner/index.m2intro.html`.

Présentation

Le cours commencera par une présentation détaillée de la transformation de Fourier des distributions tempérées, qui sera suivie par quelques applications comme la formule de Poisson et la méthode de la phase stationnaire. On abordera ensuite les estimations classiques pour la convolution, inégalité de Young, de Hardy-Littlewood-Sobolev. On démontrera ensuite l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg et les théorèmes d'injection de Sobolev. Le cours se terminera par quelques résultats de base sur le calcul pseudodifférentiel, notamment des résultats de continuité H^s et l'inégalité de Gårding. Ce cours sera utile pour les étudiants souhaitant suivre les cours fondamentaux de C. Laurent et F. Klopp.

Contenu

- Analyse de Fourier et applications
- Inégalités de Young, de Hardy-Littlewood-Sobolev
- Inégalité de Gagliardo-Nirenberg
- Théorèmes d'injection de Sobolev
- Calcul pseudodifférentiel

Prérequis

Une bonne familiarité avec la mesure de Lebesgue et une connaissance sommaire de la transformation de Fourier pourront être utiles.

Bibliographie

– J. Duoandikoetxea. Fourier Analysis. *Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.* `URL`

– L. Hörmander. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. *Springer-Verlag, 256.*

– N. Lerner. Metrics on the Phase Space and Non-Selfadjoint Pseudo-Differential Operators. *Birkhäuser Verlag, 2010*

– N. Lerner. A Course on Integration Theory. *Birkhäuser Verlag, 2014*

– C. Sogge. Fourier integrals in classical analysis. *Cambridge Tracts in Mathematics, 105, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.*

– E.M. Stein. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. *with the assistance of Timothy S. Murphy, Princeton Mathematical Series, 43, Monographs in Harmonic Analysis, III, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.*

Contact : `nicolas.lerner@imj-prg.fr`

Cours introductif

Algèbre homologique et topologie algébrique

Muriel Livernet

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Résumé: Les outils d'algèbres homologiques sont incontournables en topologie algébrique, et sont également utilisés dans bien d'autres domaines, comme la géométrie algébrique, la théorie des représentations ou la physique mathématique. Nous donnerons dans ce cours les bases d'algèbre homologique et nous étudierons les foncteur Tor et Ext. Nous appliquerons ces notions à l'étude de l'homologie et de la cohomologie des groupes, algèbres associatives et espaces topologiques.

Objectifs: Donner de solides bases en algèbre homologique; étudier des exemples d'applications dans divers domaines ainsi qu'en topologie algébrique.

Contenu

– Langage des catégories, Complexes de chaines, homologie, homotopie
– Résolutions projectives, résolutions injectives, Foncteurs Tor et Ext
– (Co)homologie des groupes; (co)homologie de Hochschild.
– Axiomes d'Eilenberg-Steenrod pour l'homologie des espaces topologiques
– Modèles acycliques, théorème d'Eilenberg-Zilber
– cup produit en cohomologie. Applications.

Prérequis

Cours d'algèbre commutative, notions de topologie.

Bibliographie

– Allen Hatcher. Algebraic Topology. *Cambridge University Press, Cambridge, 2002.*

– Saunders Mac Lane. Homology. *Reprint of the 1975 edition, Springer-Verlag, Berlin, 1995*

– James Munkres. Elements of algebraic topology. *Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984*

Contact : livernet@imj-prg.fr

Cours introductif

Introduction aux surfaces de Riemann

Marco Maculan

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

L'objectif de ce cours est de proposer une introduction aux divers aspects algébriques, analytiques et géométriques d'un des objets les plus riches et les plus importants des mathématiques, qui est la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine.

Contenu

– Définition et exemples, courbes elliptiques, courbes algébriques, courbes associées aux fonctions holomorphes.

– Aspects topologiques, genre, triangulation, formule de Riemann-Hurwitz.

– Fibrés en droites, différentielles holomorphes et théorème de Riemann-Roch.

– Faisceaux, cohomologie de Dolbeaut, théorème d'Abel-Jacobi.

Prérequis

Analyse complexe de M1 et bases de topologie et de géométrie différentielle.

Bibliographie

– D. Mumford. Algebraic Geometry I : Complex Projective Varieties. *Classics in Mathematics*

– R. Miranda. Algebraic curves and Riemann surfaces. *Graduate Studies in Mathematics*

– O. Forster. Lectures on Riemann Surfaces. *Graduate Texts in Mathematics*

– N. Bergeron et A. Guilloux. Introduction aux surfaces de Riemann. `https://webusers.imj-prg.fr/~nicolas.bergeron/Enseignement_files/SurfaceDeRiemann.pdf`

Contact : `marco.maculan@imj-prg.fr`

Cours introductif

Géométrie différentielle et riemannienne

Julien MARCHÉ

Présentation

Il s'agira d'une introduction à la géométrie différentielle et riemannienne.

Contenu

- Variétés, champs de vecteurs, formes différentielles.
- Fibrés, connexions, courbure.
- Métriques riemanniennes, géodésiques, courbure riemannienne, liens entre courbure et géométrie/topologie.

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle (niveau M1), même si des rappels seront faits.

Bibliographie

- GALLOT, HULIN, LAFONTAINE. Riemannian Geometry.
- SPIVAK. A comprehensive introduction to differential geometry.
- PETERSEN. Riemannian Geometry.
- CHAVEL. Riemannian Geometry: a modern introduction.
- DO CARMO. Riemannian Geometry.

Contact : julien.marche@imj-prg.fr

Cours introductif

Topologie différentielle

Hussein MOURTADA

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Dans ce cours, nous introduisons les éléments de base de la topologie différentielle et nous ferons le lien avec les invariants de la topologie algébrique. Ces connaissances sont importantes en géométrie différentielle, en topologie algébrique et peuvent être utiles en géométrie algébrique.

Contenu

- Transversalité. Variétés et sous variétés lisses. Indice d'intersection et degré d'une application.
- Éléments d'homologie et de cohomologie. Cohomologie de de Rham. Homologie et cohomologie cellulaires.
- Fibrés vectoriels et classes caractéristiques.

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle de niveau M1. Les connaissances de topologie algébrique sont les bienvenues, mais les notions utilisées seront introduites.

Bibliographie

- V. Guillemin, A. Pollack. Differential topology. *AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010.*
- A. Hatcher. Algebraic topology. *Cambridge University Press, Cambridge, 2002.*
- J. Milnor, J. D. Stasheff. Characteristic classes. *Annals of Mathematics Studies (Book 76).*
- J. Milnor. Topology from the differentiable viewpoint. *Princeton Landmarks in Mathematics and Physics.*

Contact : hussein.mourtada@imj-prg.fr

Cours introductif

Géométrie et théorie des représentations I

Eric Vasserot

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est d'introduire les groupes algébriques et algèbres de Lie, ainsi que quelques notions sur leur théorie de représentations.

En fin de cours on abordera des méthodes géométriques en théorie des représentations (variété de drapeaux, faisceaux pervers, etc).

Contenu

- Introductions aux algébres de Lie et aux groupes algébriques (complexes)
- Catégorie O, catégories quasi-héréditaires
- Faisceaux constructibles, catégories dérivées
- Variété de drapeaux, cône nilpotent et résolution de Springer

Prérequis

Bibliographie

- Chriss, Ginzburg. Representation theory and complex geometry.
- Hotta, Takeuchi, Tanisaki . D-modules, perverse sheaves, and representation theory.
- Humphreys . Introduction to Lie algebras and Representation Theory.
- Humphreys . Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category O.
- Borel . Linear algebraic groups.

Contact : `eric.vasserot@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Systèmes dynamiques I

Viviane Baladi (Travaux dirigés par Patrice Le Calvez)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps. On suppose généralement que la loi d'évolution est déterministe et fixée. La donnée est alors une transformation d'un espace dans lui même, que l'on peut itérer (temps discret, N ou Z), ou alors une équation différentielle, dont la solution est un flot (temps continu, R). De nombreux exemples intéressants viennent de la physique (mécanique, notamment étude du système solaire, mécanique statistique, ...), mais aussi de l'informatique, la chimie, la biologie... L'évolution pour des temps longs est souvent compliquée, donc difficile (impossible en pratique!), à prédire de façon exacte ("chaos", "effet papillon"). Cependant, divers outils permettent de décrire cette évolution de façon qualitative, notamment probabiliste, pour des classes de dynamiques assez vastes pour inclure des modèles intéressants.

Ce cours introductif est orienté vers la dynamique différentiable et la théorie ergodique, avec des illustrations surtout en dynamique unidimensionnelle. Nous signalons un cours fondamental complémentaire de C. Matheus à Paris-Diderot sur les exposants de Lyapunov.

Contenu

– Dynamique topologique (codage, entropie topologique...).

– Théorie ergodique (mesures invariantes, théorème de Poincaré, de Birkhoff, ergodicité, mélange).

– Entropie de Kolmogorov (théorème de Shannon-McMillan-Breiman, mesure maximisant l'entropie, principe variationnel).

– Dynamique différentiable en dimension un (utilisation de l'opérateur de transfert, mesures absolument continues par rapport Ã Lebesgue, vitesse de mélange).

– Si le temps le permet, sans preuves: théorème de la limite centrale, grandes déviations, stabilité stochastique, stabilité statistique.

Prérequis

Topologie, théorie de la mesure, analyse réelle.

Bibliographie

– M. Brin et G. Stuck. Introduction to dynamical systems. *Cambridge University Press, 2002*

– P. Walters. An introduction to ergodic theory. *Graduate Texts In Mathematics, Springer-Verlag*

– A. Katok et B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Cambridge University Press*

– P. Le Calvez. Systèmes dynamiques I. *Cours UPMC 2014-15* `http://mathfond.math.upmc.fr/2014-15/fiches/CoursSysDyn%282014-2015%29.pdf`

Contact : `viviane.baladi@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Géométrie complexe et théorie de Hodge

Junyan Cao

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est de donner une introduction à la géométrie complexe. Comme une variété complexe est aussi un espace topologique, il est intéressant d'étudier les liens entre la structure complexe et la topologie. La théorie de Hodge est un outil puissant qui fournit ces liens entre géométrie et topologie. On verra que les résultats sont particulièrement pertinents dans le cas des variétés kählériennes compactes qui sont une classe assez large et très importante de variétés complexes.

Contenu

- Variétés complexes, cohomologie de Dolbeault, Fibrés holomorphes, connexion de Chern
- Opérateurs laplaciens, théorie de Hodge des variétés riemanniennes compactes
- Variétés kählériennes, identités de la géométrie kählérienne, décomposition de Hodge
- Estimations L^2, théorèmes d'annulation, plongement de Kodaira

Prérequis

Surfaces de Riemann, géométrie différentielle

Bibliographie

- J. Bertin, J.-P. Demailly, L. Illusie, C. Peters. Introduction à la théorie de Hodge.
- J.-P. Demailly. Complex analytic and differential geometry. `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/documents.html`
- D. Huybrecht. Complex geometry: an introduction.
- C. Voisin. Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.

Contact : `junyan.cao@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Prolongement unique et applications

Camille Laurent

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Dans ce cours, on s'intéressera à la propriété suivante de prolongement unique pour certaines classes d'opérateurs différentiels P:

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et un petit ouvert $U \subset \Omega$, a-t-on la propriété?

$$Pu = 0 \text{ sur } \Omega, \quad u|_U = 0 \Longrightarrow u = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Dans certains cas, on s'intéressera à la quantification de ces résultats, c'est-à-dire

$$Pu \text{ petit sur } \Omega, \quad u \text{ petit sur } U \Longrightarrow u \text{ petit sur } \Omega.$$

L'outil principal sera les inégalités de Carleman. On donnera aussi des applications au contrôle exact ou approché de la chaleur ou des ondes.

Si le temps le permet, on discutera aussi de la version haute fréquence et de la contrôlabilité exacte des ondes sous la condition de contrôle géométrique.

Contenu

- Inégalités de Carleman pour des opérateurs elliptiques: application au contrôle de la chaleur
- Prolongement unique pour des opérateurs réels indépendants d'une variable: application au contrôle approché des ondes

Prérequis

Cours Introductif *Éléments d'analyse pour le Master* de Nicolas Lerner

Bibliographie

- Jérôme Le Rousseau et Gilles Lebeau. On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var., 18(3):712–747, 2012*
- Lars Hörmander. The Analysis of Linear Partial Differential Operators, volume IV, chap 28. *Springer-Verlag, Berlin, 1994.*
- Lars Hörmander. On the uniqueness of the Cauchy problem under partial analyticity assumptions. *In Geometrical optics and related topics (Cortona, 1996), volume 32 of Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., pages 179–219. Birkhauser Boston, Boston, MA, 1997.*

Contact : `laurent@ann.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Algèbre homologique et cohomologie des faisceaux

François Loeser

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le point de vue catégorique, l'algèbre homologique ainsi que les faisceaux et leur cohomologie dont des outils de base dans tous les domaines relevant de l'algèbre ou de la topologie. L'objet de ce cours est d'en présenter les bases en gardant en vue les applications potentielles.

Contenu

– Le langage des catégories. Foncteurs adjoints. Limites et colimites.

– Catégories abéliennes. Objets injectifs et projectifs. Foncteurs dérivés.

– Faisceaux et cohomologie.

Prérequis

Bibliographie

– Roger Godement. Topologie algébrique et théorie des faisceaux . *Hermann Editeurs* `URL`

– Pierre Schapira. Algebra and Topology. `http://webusers.imj-prg.fr/~pierre.schapira/lectnotes/AlTo.pdf`

Contact : `Francois.Loeser@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Introduction aux formes modulaires

Alberto Minguez

Notes de cours : `https://webusers.imj-prg.fr/ alberto.minguez/`.

Présentation

Ce cours est une introduction aux formes modulaires.

Les formes modulaires sont des fonctions méromorphes sur le demi-plan de Poincaré satisfaisant une propriété d'invariance pour l'action d'un sous-groupe convenable Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Malgré une définition d'apparence analytique-complexe, ces fonctions recèlent des propriétés arithmétiques remarquables, encodées dans leurs coefficients de Fourier.

Contenu

– Formes modulaires. Définition, exemples.

– Courbes modulaires comme surfaces de Riemann. Interprétation géométrique d'une forme modulaire.

– Opérateurs de Hecke, formes propres et coefficients de Fourier.

Prérequis

Surfaces de Riemann. Courbes elliptiques. Théorie des nombres.

Bibliographie

– F. Diamond - J. Shurman. A first course in Modular Forms.

– T. Miyake. Modular Forms.

– J.-P. Serre. Cours d'arithmétique.

– N. Koblitz. Introduction to Elliptic curves and Modular Forms.

Contact : `alberto.minguez@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Topologie algébrique

Alexandru Oancea (Travaux dirigés par Penka Georgieva)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

La topologie algébrique fait le lien entre la géométrie et l'algèbre. L'on se propose de distinguer des objets topologiques en leur associant des invariants de nature algébrique (nombres entiers, groupes, anneaux, modules ...) Les idées et images issues de la topologie algébrique irriguent l'ensemble des mathématiques modernes.

Le but de ce cours est d'approfondir les notions d'homologie et de cohomologie à travers l'étude des variétés et des fibrés vectoriels.

Les variétés lisses sont des objets d'une importance centrale en topologie et géométrie. Les fibrés vectoriels modélisent la donnée d'informations supplémentaires de nature infinitésimale le long de la variété base. Les deux thèmes phare que nous allons poursuivre dans ce cours sont la dualité de Poincaré et la théorie des classes caractéristiques. Nous allons développer cette dernière en mettant l'accent sur le point de vue de la théorie de l'obstruction.

Contenu

- Homologie et cohomologie singulière. Propriétés. Opérations. Points de vue simplicial et cellulaire. Calculs.
- Classe fondamentale. Dualité de Poincaré. Coefficients tordus.
- Classes caractéristiques : Euler, Stiefel-Whitney, Chern, Pontryagin.
- Groupes d'homotopie d'ordre supérieur. Théorie de l'obstruction.
- Cohomologie des grassmanniennes et point de vue axiomatique sur les classes caractéristiques

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de topologie algébrique de niveau M1. Il est fortement conseillé d'avoir suivi le cours introductif de géométrie différentielle M2. Il sera utile d'avoir suivi le cours introductif de topologie différentielle M2 de Paris 7.

Bibliographie

- Allen Hatcher. Algebraic topology. *Cambridge Univ. Press* `https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`
- Allen Hatcher. Vector bundles and K-theory. `https://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf`
- Glen Bredon. Geometry and topology. *Springer*
- John Milnor, Jim Stasheff. Characteristic classes. *Princeton Univ. Press*
- Henri Paul de Saint Gervais. Analysis situs. Topologie algébrique des variétés. `http://analysis-situs.math.cnrs.fr`
- Frédéric Paulin. Topologie algébrique élémentaire. `http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf`

Contact : `alexandru.oancea@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Géométrie et théorie des représentations II

Eric Vasserot

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est d'introduire les groupes algébriques et algèbres de Lie, ainsi que quelques notions sur leur théorie de représentations.

En fin de cours on abordera des méthodes géométriques en théorie des représentations (variété de drapeaux, faisceaux pervers, etc).

Contenu

- Introductions aux algébres de Lie et aux groupes algébriques (complexes)
- Catégorie O, catégories quasi-héréditaires
- Faisceaux constructibles, catégories dérivées
- Variété de drapeaux, cône nilpotent et résolution de Springer

Prérequis

Cours "Géométrie et théorie des représentations I".

Bibliographie

- Chriss, Ginzburg. Representation theory and complex geometry.
- Hotta, Takeuchi, Tanisaki . D-modules, perverse sheaves, and representation theory.
- Humphreys . Introduction to Lie algebras and Representation Theory.
- Humphreys . Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category O.
- Borel . Linear algebraic groups.

Contact : `eric.vasserot@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Topologie des variétés algébriques

Claire Voisin

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

La théorie de Hodge fournit les notions de structure de Hodge développée par Griffiths et de structure de Hodge mixte introduite par Deligne. C'est un outil puissant pour étudier la topologie des (familles de) variétés algébriques complexes et j'en présenterai les principaux résultats, ainsi que certaines applications récentes. L'un des aspects fondamentaux du domaine est l'interaction entre données transcendantes (topologie) et données algébriques (cycles algébriques). La théorie de Hodge nous donne conjecturalement un moyen de mesurer le coniveau, c'est-à-dire la codimension du support de la partie transcendante de la cohomologie, et selon Bloch et Beilinson, celui-ci pourrait également être calculé via l'étude des groupes de Chow. J'expliquerai comment ces conjectures se formulent via la notion de décomposition de la diagonale et décrirai quelques progrès récents.

Contenu

- Structures de Hodge, polarisations, structures de Hodge mixtes. Existence et propriétés fondamentales (semi-simplicité; les morphismes sont stricts).
- Applications à la topologie des variétés algébriques :
  (a) Algèbres de cohomologie.
  (b) Théorème global des cycles invariants et théorème de décomposition.
  (c) Coniveau de Hodge et coniveau algébrique. Diverses formulations de la conjecture de Hodge généralisée.
- Cycles algébriques et coniveau. Groupes de Chow et théorème de Mumford. Décomposition de la diagonale généralisée et conjecture de Bloch généralisée. Cas des hypersurfaces très générales.

Prérequis

Des connaissances en topologie algébrique (cohomologie des faisceaux).

Bibliographie

Contact : `claire.voisin@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Modèles, groupes, modules (1)

Adrien Deloro

Notes de cours : `https://webusers.imj-prg.fr/ adrien.deloro/index.php?topic=teaching`.

Présentation

Le cours, en deux volets, présentera certains aspects de la *théorie des modèles des groupes linéaires.*

Ce premier volet explicitera les bases de théorie des modèles et quelques propriétés des groupes en contexte modèle-théorique. On s'orientera rapidement vers les groupes de rang de Morley fini, qui généralisent à bien des égards les groupes algébriques linéaires.

Contenu

– Théorie des modèles
– Groupes stables et conditions de chaîne
– Définissabilité et constructibilité
– Groupes linéaires sur les corps algébriquement clos
– Groupes de rang de Morley fini

Prérequis

- Du point de vue modèle-théorique, le cours n'a pas de prérequis mais une certaine familiarité avec la définissabilité ne nuit jamais.
- De même, pas de prérequis formels sur les groupes algébriques.
- En revanche, tous les résultats classiques (niveau L2) d'algèbre linéaire sont tenus pour acquis.
- Les concepts de base de la théorie des groupes (conjugaison, calculs de commutateurs, nilpotence, résolubilité...) seront supposés bien connus.

Lectures conseillées (mais non requises)

- L'ouvrage de Poizat est destiné à un public ayant une culture modèle-théorique, laquelle peut s'acquérir dans celui de Marker (un exemple parmi beaucoup).
- Les premiers chapitres du livre de Borovik et Nesin sont hautement recommandés et devraient être couverts en cours.
- Par ailleurs, on trouvera sur le site de l'Institut Camille Jordan de nombreuses notes de cours liés au nôtre : http://math.univ-lyon1.fr/ logicum//logique/enseignements/ens-log.html
- De même, les notes suivantes d'Amador Martin-Pizarro sont très indiquées : http://math.univ-lyon1.fr/ pizarro/ens.html

Bibliographie

– Poizat, Bruno. Groupes stables. *Nur al-Mantiq wal-MaÊ¾rifah, Lyon, 1987, ISBN 2-9500919-1-1*

– Borovik, Alexandre et Nesin, Ali. Groups of finite Morley rank. *Oxford Logic Guides, vol.26, Clarendon Press, Oxford, 1994, ISBN 0-19-853445-0*

– Marker, David. Model Theory. An Introduction. *Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, New York, 2002, ISBN 0-387-98760-6*

Contact : `adrien.deloro@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Introduction à l'homotopie

Grégory GINOT (Travaux dirigés par Marco ROBALO)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est de donner une introduction à la théorie de l'homotopie moderne et à ses outils et applications. On suivra essentiellement deux exemples, celui, fondateur, des espaces topologiques et celui des complexes (au sens des cours d'algèbre homologique et topologie algébrique). On présentera l'axiomatique moderne de l'homotopie, les catégories de modèles de Quillen, et on expliquera l'équivalence entre les espaces topologiques et les ensembles simpliciaux. On illustrera aussi ces méthodes via l'exemple de l'homotopie rationnelle pour montrer comment les structures multiplicatives des cochaines (singulières ou de De Rham) encodent les espaces à homotopie près.

Contenu

- Groupes d'homotopie supérieures des espaces topologiques, fibrations de Serre, CW-complexes
- Complexes de chaines, homotopie des complexes
- Catégories de modèles
- Foncteurs de Quillen et dérivés
- Comparaison des ensembles simpliciaux et espaces topologiques
- Homotopie rationnelle

Prérequis

Avoir suivi une introduction à la topologie algébrique (homologie singulière, simpliciale ou de De Rham, groupe fondamental) est fortement conseillée. Il pourra être utile d'avoir suivi un cours introductif d'algèbre homologique.

Bibliographie

- Chuck Weibel. An itroduction to Homological Algebra. *Cambridge studies*
- Mark Hovey. Model Categories. *AMS*
- Jacob Lurie. Higher Topos Theory. *Annals of mathematical Studies* `http://www.math.harvard.edu/~lurie/`
- Kathryn Hess. Rational Homotopy Theory: A Brief Introduction. `http://arxiv.org/abs/math/0604626`
- Glen Bredon. Topology and Geometry. *Springer*

Contact : `gregory.ginot@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Variations de structures de Hodge

Bruno Klingler

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Dans ce cours, on présentera l'approche variationnelle de la théorie de Hodge développée dans les années 70-80 du siècle dernier par Griffiths et Deligne. Il s'agit d'étudier la famille des cohomologies d'une famille de variétés projectives et lisses complexes. Le but du cours sera d'exposer la preuve d'un théorème de Cattani-Deligne-Kaplan (1995) affirmant l'algébricité du lieu de Hodge d'une telle famille, et qui constitue à ce jour la meilleure évidence en faveur de la conjecture de Hodge.

Contenu

- Structures de Hodge, variation de structures de Hodge, lieu de Hodge
- Domaines de périodes et applications de période
- Dégénérescences de structures de Hodge : théorème de l'orbite nilpotente
- Théorème de l'orbite SL2
- Théorème de Cattani-Deligne-Kaplan

Prérequis

Cours de Junyan Cao "Géométrie complexe et théorie de Hodge"; Théorie des faisceaux; un cours de Groupes algébriques ou de théorie de Lie est utile.

On signale aussi le cours de Claire Voisin "Topologie des variétés algébriques complexes" qui ne fait pas partie des prérequis du cours "Variations de structures de Hodge", mais qui est proche du point de vue de la thématique.

Bibliographie

- Voisin. Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe. *references*
- Peters-Steenbrink. Mixed Hodge theory.
- Carlson-Peters-Muller Stach. Period mappings and period domains.

Contact : `bruno.klingler@gmail.com@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Théorie spectrale des opérateurs aléatoires

Frédéric Klopp

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours se veut une présentation de résultats récents sur la théorie spectrale des opérateurs aléatoires dans le régime localisé par le biais du modèle le plus simple, le modèle d'Anderson.

Introduits en physique de la matières condensée dans les années 50, les opérateurs aléatoires modélisent la propagation des électrons dans un milieu désordonnée. L'hypothèse stochastique se justifie par la présence homogène d'impuretés dont seules sont connues des caractéristiques macroscopiques comme la densité.

Le caractère aléatoire et homogène du potentiel confère aux opérateurs aléatoires de nombreuses propriétés intéressantes, en particulier, une propriété d'ergodicité qui assure que, de nombreux points de vue, la famille d'opérateur se comporte comme un opérateur unique. Cette liberté est alors exploitée pour l'étude de ces opérateurs.

L'une des caratéristiques de ces modèles est la présence d'un régime localisé i.e. d'intervalles dans le spectre qui ne sont constitués que de spectre ponctuel et tel que les fonctions propres associées aux valeurs propres dans ces intervalles sont à décroissance exponentielle.

L'analyse des opérateurs aléatoires se situe aux confins de plusieurs domaines des mathématiques, la théorie spectrale et celle des probabilités mais aussi de l'analyse harmonique et de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Contenu

- L'ergodicité et ses conséquences. La densité d'états intégrée.
- Estimée de Wegner.
- Le régime localisé. La méthode des moments fractionnaires.

Prérequis

Analyse réelle et complexe ; analyse fonctionnelle.

Bibliographie

- Werner Kirsch. An invitation to random Schrödinger operators. In Random Schroedinger operators. *volume 25 de Panor. Syntheses, pages 1-119. Soc. Math. France, Paris, 2008.*
- Leonid Pastur and Alexander Figotin. Spectra of random and almost-periodic operators. *volume 297 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1992*

Contact : `frederic.klopp@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Systèmes dynamiques II

Frederic Le Roux (Travaux dirigés par Vincent Humilière)

Notes de cours : `http://mathfond.math.upmc.fr/2013-14/fiches/CoursSysDyn(2013-2014).pdf`.

Présentation

Ce cours, qui constitue la suite du cours Systèmes dynamiques I du premier semestre, sera formé de deux parties.

Nous étudierons d'abord les systèmes dynamiques sur le cercle, et en particulier la théorie du nombre de rotation qui permet une classification dynamique complète des homéomorphismes du cercle.

La seconde partie concernera les systèmes dynamiques uniformément hyperboliques. Ceux-ci forment une large classe de systèmes qui sont à la fois "chaotiques" et stables. Nous introduirons les exemples fondamentaux (doublement de l'angle, fer à cheval de Smale, automorphismes linéaires hyperboliques du tore) et les principaux outils pour leur étude : outre l'entropie introduite au premier semestre, les chaînes de Markov topologiques, les automorphismes hyperboliques d'un espace vectoriel de dimension quelconque, et les partitions de Markov.

Contenu

(1) Dynamique des homéomorphismes et difféomorphismes du cercle

- Nombre de rotation
- Théorème de Denjoy
- (éventuellement) Alternative de Tits dans le groupe des homéomorphismes du cercle

(2) Systèmes dynamiques hyperboliques

- Sous-décalages de type fini
- Systèmes dynamiques uniformément hyperboliques, difféomorphismes linéaires du tore
- Partitions de Markov
- (éventuellement) Entropie et groupe fondamental

Prérequis

Systèmes dynamiques I

Bibliographie

– Hasselblatt, Katok. Modern theory of dynamical systems.

Contact : `frederic.le-roux@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Introduction aux schémas et à leur cohomologie

François Loeser

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours de théorie des schémas mettra l'accent sur le point de vue cohomologique.

Contenu

- Schémas: définitions de base et exemples
- Les faisceaux cohérents et leur cohomologie
- Caractérisation cohomologique des schémas affines
- Faisceaux amples et finitude de la cohomologie dans le cas projectif
- Dualité de Serre et applications

Prérequis

Le cours "Introduction à la géométrie algébrique". Le cours fondamental 1 "Algèbre homologique et cohomologie des faisceaux".

Bibliographie

- Robin Hartshorne. Algebraic Geometry. *Springer GTM* URL
- Antoine Ducros. Introduction à la théorie des schémas . http://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/polym2.pdf

Contact : Francois.Loeser@imj-prg.fr

Cours fondamental 2

Courbes elliptiques

Benoît Stroh

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Les courbes elliptiques sont le premier exemple non évident de courbes algébriques propres et lisses. Elles permettent ainsi d'illustrer agréablement des notions générales de géométrie algébrique. Mais elles donnent surtout naissance à une riche théorie arithmétique, qui intervient par exemple dans la démonstration par Wiles du théorème de Fermat. Nous étudierons plusieurs aspects de l'arithmétique des courbes elliptiques.

Contenu

- Loi de groupe et théorème de Riemann-Roch
- Points de torsion et module de Tate
- Bonne et mauvaise réduction
- Multiplication complexe
- Théorème de Mordell-Weil
- Modèle de Néron

Prérequis

Cours "Introduction à la géométrie algébrique" de I. Itenberg. Cours "Introduction aux surfaces de Riemann" de M. Maculan.

Bibliographie

– J. Silverman. The arithmetic of elliptic curves.. *Graduate Texts in Mathematics 106, Springer.*

– J. Nekovar. Elliptic functions and elliptic curves. `https://webusers.imj-prg.fr/~jan.nekovar/co/ln/el/el1.pdf`

Contact : `benoit.stroh@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Modèles, groupes, modules (2)

Adrien Deloro

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Le cours, en deux volets, présentera certains aspects de la *théorie des modèles des groupes linéaires.*

Ce second volet se concentrera sur les groupes de rang de Morley fini : structure abstraite et représentations linéaires. On envisagera notamment la question des représentations définissables des groupes algébriques.

Contenu

– Théorie des modèles
– Groupes définissables dans les groupes linéaires
– Modules de rang de Morley fini

Prérequis

Fait suite à Modèles, groupes, modules (1).

Bibliographie

– . Voir bibliographie du premier volet.

Contact : `adrien.deloro@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Théorie de Hurwitz

Penka GEORGIEVA

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

La théorie de Hurwitz d'une surface lisse porte sur le dénombrement des revêtements de la surface avec des ramifications spécifiées. Elle est liée naturellement aux plusieurs domains des mathématiques, comme la théorie des représentations, la théorie de Gromov-Witten et les systèmes intégrables. Le but de ce cours est de presenter des approches différentes pour exprimer les nombres de Hurwitz et d'investiguer certaines conséquences de ces points de vue.

Contenu

- Représentation de groups symétriques
- Equation cut-and-join de Goulden-Jackson-Vakil
- Théorie de Gromov-Witten et localisation

Prérequis

Bibliographie

– William Fulton et Joe Harris. Representation theory. *Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991*

– Tom Graber et Ravi Vakil. Hodge integrals and Hurwitz numbers via virtual localization. *Compositio Math. 135 (2003), no. 1, 25–36* `http://arxiv.org/pdf/math/0003028v1.pdf`

– Andrei Okounkov et Rahul Pandharipande. Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and matrix models, I. *Proc. Symposia Pure Math. 80 (2009), 325–414* `http://arxiv.org/abs/math/0101147`

Contact : `penka.georgieva@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Introduction à la topologie symplectique, homologie de Floer

Vincent Humilière

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours présentera une branche de la topologie différentielle en plein développement, la topologie symplectique. Nous démontrerons quelques-uns des théorèmes fondamentaux du domaine (Non-squeezing de Gromov, conjecture d'Arnold,...). Cela passera par la construction d'un outil très puissant: l'homologie de Floer.

Contenu

– Variétés symplectiques, formalisme hamiltonien
– Théorie de Morse
– Homologie de Floer
– Points fixes des difféomorphismes Hamiltoniens (conjecture d'Arnold)
– Capacités symplectiques et non-squeezing de Gromov
– Autres applications de l'homologie de Floer (en fonction du temps disponible)

Prérequis

Il est indispensable d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle de niveau M1 (variétés, formes différentielles, champs de vecteur). Des connaissances d'algèbre homologique élémentaire seront également utiles.

Bibliographie

– M. Audin, M. Damian. Théorie de Morse et homologie de Floer. *EDP Sciences, CNRS Editions, 2010*

– D. McDuff, D. Salamon. Introduction to symplectic topology. *Oxford University Press,1998*

Contact : vincent.humiliere@imj-prg.fr

Cours spécialisé

Modules de Hodge mixtes

Bruno Klingler

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le cours sera une introduction à la théorie des modules de Hodge mixtes, qui généralise la théorie des variations de structures de Hodge dans un cadre singulier. Cette théorie, développée par M.Saito dans les années 80, connaît un renouveau avec de nombreuses applications à la topologie des variétés algébriques complexes, qui seront présentées.

Contenu

– formes harmoniques L2: travaux de Zucker
– Modules de Hodges mixtes: le cas des courbes
– Fondamentaux sur les D-modules
– Le formalisme de Saito
– Applications: théorème de Popa-Schnell, ...

Prérequis

Le cours précédent "Variations de structures de Hodge"

Bibliographie

– Sabbah-Schnell. livre en préparation. `http://www.cmls.polytechnique.fr/perso/sabbah.claude/MHMProject/mhm.html`
– Saito. articles dont les références seront données en cours.

Contact : `bruno.klingler@gmail.com@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Analyse fonctionnelle et mécanique quantique

Mathieu Lewin

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

La mécanique quantique repose depuis son invention sur des techniques d'analyse fonctionnelle avancées, beaucoup ayant d'ailleurs été développées à cette fin.

Après avoir introduit le formalisme général de la mécanique quantique, nous nous focaliserons sur le modèle de Schrödinger décrivant un système de N particules en interaction. Nous insisterons en particulier sur la façon dont certains outils d'analyse fonctionnelle (en particulier inégalités fonctionnelles, théorie spectrale et algèbres d'opérateurs) peuvent être utilisés pour en déduire des résultats très fins sur le comportement de ces systèmes. Notre présentation mêlera théories classiques et résultats très récents.

Contenu

- Formalisme de la mécanique quantique
- Théorie spectrale des opérateurs à N corps, théorème HVZ
- Topologies faibles, algèbres d'opérateurs
- Dynamique en temps long, théorèmes de type RAGE
- Limites à grand nombre de particules

Prérequis

Cours de base d'analyse fonctionnelle. Aucune connaissance physique n'est nécessaire pour suivre le cours.

Bibliographie

- Mathieu Lewin. Variational Methods in Quantum Mechanics. *en préparation*

Contact : `mathieu.lewin@math.cnrs.fr`

Cours spécialisé

Structures à homotopies près

Muriel Livernet

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Résumé: Etant donné un espace topologique X, on peut considérer son espace de lacets ΩX. Ce dernier a l'avantage d'être muni d'une structure multiplicative, qui n'est pas associative mais qui est associative à homotopie près. Stasheff a caractérisé les espaces de lacets en montrant qu'ils étaient associatifs à "toutes" homotopies près: ce sont des A_∞-espaces. Si l'on considère un espace de lacet double, la multiplicaiton est non seulement associative à "toutes" homotopies près mais est aussi commutative à une homotopie près. Au bout de la chaine se trouvent les espaces de lacets infinis, qui ont une structure commutative à toutes homotopies près. Les opérades ont été inventées dans les années 60 par Boardman et Vogt, afin de comprendre, en étendant les travaux de Stasheff, les structures sur les espaces de lacets n-itérés. C'est ce que l'on appelle les structures E_n. Dans ce cours nous présenteront certains développements récents sur ce sujet.

Objectifs: Comprendre les structures E_n à l'aide de la théorie des opérades, ainsi que certains modèles et leurs utilisations en homologie de Hochschild supérieure.

Contenu

- Espaces de lacets, A_∞-espaces. Opérades topologiques, opérades des petits disques
- Des opérades topologiques aux opérades algébriques via le complexe des chaines singulières. Présentation de l'homologie des opérades des petits disques.
- Opérades E_n en topologie et en algèbre. Différents modèles d'opérades E_n d'après Berger et McClure et Smith.
- Exemple de structures E_∞: le complexe des cochaines singulières d'un espace.
- Homologie de Hochschild supérieure.
- Questions d'actualités.

Prérequis

Solides bases en topologie algébrique. Des notions de catégories modèles et d'opérades pourront être utiles.

Bibliographie

- C. Berger et B. Fresse. Combinatorial operad actions on cochains. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 137 (2004), 135-174*
- J.-L. Loday et B. Vallette. Algebraic Operads. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 346, Springer-Verlag (2012)*
- M. Livernet et B. Richter. An interpretation of En-homology as functor homology. *Mathematische Zeitschrift, Volume 269, Numbers 1-2 / Oktober 2011, 193–219*
- Michael A. Mandell. Cochains and Homotopy Type. *Publ. Math. IHES, 103 (2006), 213-246.*

– Y. I. Manin. Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces. *Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999*

– J. McClure et J. Smith. A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture. *In Recent progress in homotopy theory, 293, Contemp. Math., pages 153-193. AMS, Providence, RI, 2002.*

Contact : `livernet@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Groupes p-divisibles et variétés abéliennes

Benoît Stroh

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but principal du cours est l'étude des groupes p-divisibles, un exemple typique de groupe p-divisble étant le groupe des points de torsion p-primaire d'une courbe elliptique. Cet exemple se généralise lorsqu'on remplace la courbe elliptique par une variété abélienne ; nous serons donc amenés à introduire les variétés abéliennes et à présenter quelques unes de leurs propriétés.

Nous aborderons les théorèmes de Serre-Tate et Grothendieck-Messing, qui élucident les anneaux de déformations des objets précédents : déformer une variété abélienne revient à déformer son groupe p-divisible, ce qui revient à déformer la filtration de Hodge. Nous étudierons aussi quelques aspects de la théorie de Dieudonné ainsi que la décomposition de Hodge-Tate de la cohomologie des variétés abéliennes.

Contenu

– Groupes p-divisibles
– Théorie de Dieudonné
– Variétés abéliennes
– Théorème de Serre-Tate
– Théorème de Grothendieck-Messing

Prérequis

Cours de géométrie algébrique de F. Loeser. Cours de courbes elliptiques de B. Stroh.

Bibliographie

– J. Tate. p-divisible groups.. *Proceedings of a Conference on Local Fields, pp 158-183*

– W. Messing. The crystals associated to Barsotti-Tate groups, with applications to abelian schemes.. *Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.*

– A. Grothendieck. Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné.. *éminaire de Mathématiques Supérieures, No. 45, Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1974.*

– D. Mumford. Abelian varieties. *Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics*

Contact : `benoit.stroh@imj-prg.fr`