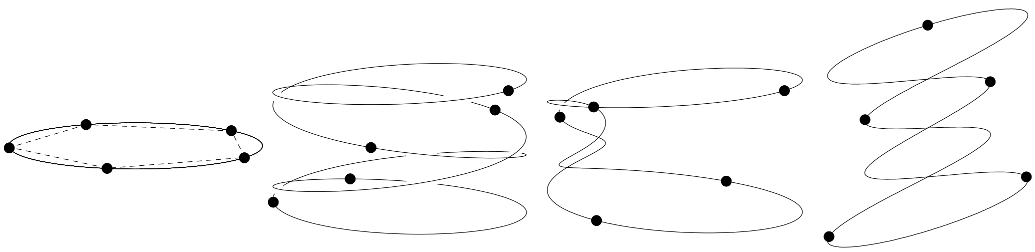
Université Pierre et Marie Curie (Paris vi)

Master de Sciences et Technologie
Mention Mathématiques et Applications

M2 de Mathématiques fondamentales

Année universitaire 2015–2016

Responsables : Elisha Falbel et Ilia Itenberg



Secrétariat : Mme L. Dreyfuss

Campus de Jussieu, 1er étage, couloir 15-25, bureau 1.09
4, place Jussieu, 75005 Paris

Tél & Fax : 01 44 27 85 45
Mél : master.math.fond@upmc.fr
Url : http://mathfond.math.upmc.fr/

Table des matières

1 Le M2 de Mathématiques fondamentales

La spécialité *Mathématiques fondamentales* est une option de la mention *Mathématiques et Applications* du *Master de Sciences et Technologie* de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Elle s'adresse aux étudiants titulaires d'un M1 de mathématiques ou d'un titre équivalent et comprend deux parcours : "Mathématiques Recherche" et "Mathématiques avancées".

Un large spectre des mathématiques fondamentales est généralement couvert, avec des variations selon les années : théorie des nombres, géométrie algébrique, théorie de Lie, topologie, géométries analytique et différentielle, systèmes dynamiques, analyse fonctionnelle, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles, etc.

Parcours "Mathématiques Recherche"

Ce parcours, assez exigeant, s'adresse à tous les étudiants se destinant à un doctorat en Mathématiques fondamentales. Une fois ce doctorat accompli, les débouchés naturels sont les métiers de la recherche et de l'enseignement supérieur, au CNRS, à l'université ou dans les centres de recherche des grandes entreprises. Ces diplômes devraient aussi être un gage de puissance et de créativité intellectuelles suffisant pour intéresser les entreprises de haute technologie, comme c'est déjà le cas pour des diplômes équivalents en Allemagne, au Royaume Uni et aux Etats-Unis.

Parcours "Mathématiques Avancées"

Ce parcours, plus abordable, intéressera les étudiants dont le but principal est de valider le Master, sans poursuivre en doctorat. Les cours proposés sont essentiellement les mêmes que pour le parcours "Recherche", mais les règles de validation sont assouplies, et il est aussi possible de valider certains cours de M1 avancés.

Les détails des règles permettant de valider l'un ou l'autre des parcours se trouvent sur la page "Organisation" de cette brochure.

2 Organisation et déroulement du M2

Comme tout M2, le cursus comprend des *cours* et un *stage*. Les règles de validation dépendent du parcours envisagé.

Les cours se répartissent en 4 périodes de 6 semaines, regroupées de la façon suivants :

- cours d'introduction de 24 heures sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours fondamentaux I et II, de 24 heures plus 12 heures de TD, sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours spécialisés, en général de 24h sur 6 semaines (9 ECTS chacun).

En règle générale, la validation de chaque cours est conditionnée par la réussite à un examen écrit qui se tient à la fin de l'enseignement concerné. Une session de rattrapage pourra être organisée en juin, si nécessaire : les étudiants intéressés par un rattrapage devront contacter directement les enseignants. Pour les cours spécialisés, la validation peut prendre d'autres formes : examen oral, mini-mémoire de synthèse sur un thème connexe, etc.

Voici les règles de validation des deux parcours.

Parcours “Mathématiques Recherche”

Les cours (36 ECTS)

Les étudiants doivent valider 4x9=36 ECTS de cours, dont au plus 18 ECTS en cours introductifs et au moins 9 ECTS en cours fonda 2 ou spécialisé. Il est possible de valider des crédits de cours d'autres universités (Paris 7, Orsay...) après accord des responsables du M2, qui vérifieront notamment la cohérence du choix.

Le stage (21 ECTS)

Il consiste en un travail personnel de compréhension, d'explication et de synthèse d'un ou plusieurs articles de recherche, conclu par la rédaction d'un mémoire et une soutenance devant un jury. Le sujet du mémoire est bien souvent, mais pas nécessairement, un tremplin vers le futur sujet de thèse.

Il est conseillé de prospecter pour un directeur de stage potentiel dès que l'on est sûr de son sujet de prédilection. Fin mars semble être une limite raisonnable.

La date de soutenance du mémoire sera fixée en accord avec le directeur de recherche et les membres du jury. *Attention :* les étudiants qui désirent candidater à un **Contrat Doctoral** auprès de l'Ecole Doctorale devront avoir soutenu leur mémoire *avant fin juin.* Pour les autres, la limite ordinaire est *fin septembre.*

Les 3 ECTS d'ouverture

Ils consistent en l'apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Parcours “Mathématiques Avancées”

Les cours (36 ECTS)

Les étudiants doivent valider 36 ECTS sous la forme de cours. Outre les cours du M2, il est possible de valider certains cours du second semestre de M1, dont le niveau est intermédiaire entre M1 et M2. Il faudra pour cela demander l’accord d’un responsable qui s’assurera que

- le cours concerné n’a pas déjà été validé en M1,
- son contenu n’est pas inclus dans celui d’un cours de M2 déjà validé.

Par ailleurs, le nombre d’ECTS ainsi acquises est limité à 12.

Voici la liste des cours de M1 éligibles, dont on trouvera aussi une description sur la brochure générale du Master.

- Groupes et algèbres de Lie (6 ECTS)
- Introduction aux surfaces de Riemann (6 ECTS)
- Groupe fondamental et revêtements (6 ECTS)
- Théorie analytique des équations différentielles ordinaires (6 ECTS)
- Équations aux dérivées partielles (12 ECTS)
- Histoire des mathématiques (6 ECTS)

Le stage (21 ECTS)

Il est similaire à celui du parcours Recherche. Le sujet du mémoire pourra cependant être plus adapté au projet de l’étudiant, notamment si celui-ci se destine à l’agrégation.

Les 3 ECTS d’ouverture

Ils consistent en l’apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Télé-enseignement

Une possibilité d’enseignement par correspondance est ouverte sur certains cours. Les étudiants par correspondance reçoivent ou téléchargent les polycopiés des cours, passent les examens à l’Université, et correspondent directement avec les enseignants (resp. leur directeur de stage) pour les questions pédagogiques (resp. la préparation de leur mémoire). Certains polycopiés sont disponibles sur les pages web des enseignants.

On consultera le site web du M2 pour des informations à jour concernant les cours disponibles par correspondance.

3 Inscription et candidature

L'inscription au master de Mathématiques fondamentales est réservée aux étudiants titulaires du M1, d'une maîtrise de mathématiques pures, ou d'un diplôme équivalent par décision individuelle d'équivalence du Président de l'Université.

En revanche, l'acceptation n'est pas automatique. Une sélection sera effectuée au vu des résultats obtenus dans les années antérieures. Voici les démarches pour candidater.

Inscription administrative par internet

Obligatoirement remplir un dossier d'inscription administrative via internet sur le site de la scolarité de l'université `http://www.upmc.fr/fr/formations/inscriptions_scolarite.html`. Si ce site est fermé, s'adresser au secrétariat.

Il sera demandé certains renseignements administratifs, après quoi il faudra imprimer le dossier ; de la persévérence peut s'avérer nécessaire ! Un numéro de dossier ainsi qu'un mot de passe vous seront alors attribués, qui permettront de suivre sur ce site l'évolution du statut de votre candidature.

Candidature

Ensuite, constituer un dossier de candidature et le remettre au secrétariat. *Demander au secrétariat la date limite de remise du dossier de candidature (courant septembre).*

Ce dossier doit comporter :

- le dossier d'inscription administrative imprimé
- le formulaire de candidature avec photo d'identité (téléchargeable sur le site internet)
- le relevé de notes de M1, délivré par son université d'origine.

Les étudiants ayant des diplômes étrangers doivent fournir en plus :

- la photocopie du programme des cours suivis pendant les quatre années d'études supérieures
- le relevé de notes des quatre années
- la photocopie des diplômes (le Service de la Scolarité en exigera ultérieurement une traduction assermentée ; voir par exemple le site des experts traducteurs `http://www.ceticap.com/`).

Résultats

Dans le cas d'une réponse favorable, l'étudiant recevra une lettre d'acceptation signée par le responsable du parcours. Dans tous les cas, l'avis de la commission sera consultable sur internet.

Bourses

Les étudiants désirant une bourse durant leur année de M2, doivent s'adresser au Bureau des bourses de l'université (campus de Jussieu). Il existe entre autres

- des bourses sur critère universitaire,
- des bourses sur critère social,
- des allocations d'études.

Voir les détails ainsi que les conditions d'attribution (de nationalité, de situation familiale, etc.) sur le site du bureau des bourses `http://www.upmc.fr/fr/vie_des_campus/bourses.html`.

Pour les deux premiers types de bourses ci-dessus il faut déposer une demande entre le 15 janvier et le 30 avril.

Par ailleurs, la Fondation Sciences Mathématiques de Paris offre des bourses d'études à travers son programme "Paris Graduate School of Mathematical Sciences". Consulter `http://www.sciencesmath-paris.fr/pgsm/`.

4 Cours de l'année 2015-2016

Chaque cours a un volume de 24h, sur 6 semaines. Les cours fondamentaux sont doublés par 12h de TD, qui sont assurés par l'auteur du cours (sauf mention du contraire)

Les cours ont généralement lieu sur le campus Jussieu. Certains auront lieu dans les bâtiments Sophie Germain et O. de Gouges de Paris 7.

Cours introductifs (7 septembre – 16 octobre 2015)

D. Hernandez (P7)	Théorie de Lie et représentations I	Lie
I. Itenberg	Introduction à la géométrie algébrique	GA, GC, TN
N. Lerner	Éléments d'analyse pour le Master *	HFE
J. Marché	Introduction aux surfaces de Riemann	GC, GT, GC
V. Minerbe	Géométrie différentielle et riemanienne *	GT
A. Zorich (P7)	Topologie différentielle I	GT

Cours fondamentaux I (2 novembre – 11 décembre 2015)

N. Bergeron, G. Ginot	Topologie algébrique des variétés	GT
L. Charles	Géométrie complexe et théorie de Hodge *	GT, GC, GA
P.-H. Chaudouard (P7)	Théorie algébrique des nombres	TN
D. Hernandez (P7)	Théorie de Lie et représentations II	Lie
M. Hindry (P7)	Courbes elliptiques	TN, GA
C. Laurent	Prolongement unique et applications *	HFE
P. Le Calvez	Systèmes dynamiques I	Dyn
F. Loeser	Algèbre homologique et cohomologie des faisceaux	GA, Lie, TN
A. Zorich (P7)	Topologie différentielle II	GT

Cours fondamentaux II (11 janvier – 19 février 2016)

C. Blanchet (P7)	Topologie différentielle des variétés de petite dimension *	GT
H. Chen (P7)	Géométrie d'Arakelov birationnelle I *	GA, TN
E. Falbel	Introduction à la géométrie hyperbolique	GT
F. Klopp	Théorie spectrale des opérateurs aléatoires	HFE
F. Le Roux	Introduction à la dynamique hyperbolique	Dyn
F. Loeser	Introduction aux schémas et à leur cohomologie	GA, Lie, TN
A. Minguez	Formes modulaires et leurs propriétés arithmétiques *	TN
P. Polo	Groupes réductifs et représentations *	Lie, GA

Cours spécialisés (29 février – 9 avril 2016)

V. Baladi	Dynamiques et spectres	Dyn
C. Blanchet (P7)	Homologie de Heegaard-Floer *	GT
H. Chen (P7)	Géométrie d'Arakelov birationnelle II *	GA, TN
A. Chiodo	Courbes spin, factorisations matricielles et symétrie miroir	GA, GC, Phy
F. Klopp	Statistiques spectrales des opérateurs aléatoires	HFE
J. Marché	Théorie géométrique des invariants	GA, Lie, GC
P. Polo	Introduction aux schémas en groupes *	Lie, GA
B. Schraen	Formes modulaires p-adiques	TN

* Cours pouvant être suivi en télé-enseignement.

GA	Géométrie algébrique	TN	Théorie des nombres	Lie	Groupes et algèbres de Lie
GC	Géométrie complexe	GT	Géométrie et topologie	Dyn	Dynamique
Phy	Physique mathématique				

HFE Analyse harmonique, analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles

Cours introductif

Théorie de Lie et représentations I

David Hernandez (Travaux dirigés par Luca Moci)

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

La théorie des représentations, notamment des algèbres de Lie, est un sujet central en mathématiques qui a de nombreuses applications à d'autres branches des mathématiques (géométrie, théorie des nombres, combinatoire, topologie...) mais aussi en physique théorique (systèmes intégrables quantiques, théorie conforme des champs...).

Le but de ce cours est double : d'une part (cours I) donner une introduction aux concepts et outils classiques de la théorie de Lie, notamment en théorie des représentations, et d'autre part (cours II) étudier des généralisations (de dimension infinie et quantiques) ainsi que certaines de leurs applications importantes.

Contenu

– Algèbres de Lie : définition, notion de représentation, exemples classiques, motivations et lien avec les groupes de Lie.

– Catégories de représentations d'une algèbre de Lie, représentations irréductibles, représentations semi-simples. Représentation adjointe.

– Complète réductibilité pour les algèbres de Lie semi-simples (théorème de Weyl).

– Structure des algèbres de Lie semi-simples, présentation de Serre. Systèmes de racines, groupe de Weyl.

– Modules de plus haut poids, modules de Verma, modules simples, catégorie O.

– Structure tensorielle, morphisme de caractère, anneau de Grothendieck.

Prérequis

Connaissances requises : a priori aucune, si ce n'est l'algèbre linéaire standard.

Bibliographie

– J-P. Serre. Lie algebras and Lie groups. *1964 lectures given at Harvard University, Lecture Notes in Mathematics, 1500, (2006)*

– W. Fulton et J. Harris. Representation Theory: A First Course. *Graduate Texts in Mathematics, 129 (3 ème édition, 2004)*

– J. Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory. *Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978*

– V. Kac. Infinite-dimensional Lie algebras. *Cambridge University Press, Cambridge, 1990*

Contact : `david.hernandez@imj-prg.fr`

Cours introductif

Introduction à la géométrie algébrique

Ilia Itenberg

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de présenter plusieurs notions et les premiers résultats de la géométrie algébrique en se basant sur beaucoup d'exemples. Conçu dans l'optique de préparer aux cours "Algèbre homologique et cohomologie des faisceaux" (cours fondamental I) et "Introduction aux schémas et à leur cohomologie" (cours fondamental II), ce cours introductif s'adresse à tout étudiant intéressé par la géométrie et l'algèbre.

Contenu

- Courbes algébriques planes (affines et projectives).
- Généralités sur les variétés affines et les variétés projectives.
- Applications régulières et applications rationnelles.
- Points lisses et points singuliers, éclatements.
- Diviseurs.
- Surfaces algébriques.

Prérequis

Le cours ne suivra pas de livre particulier ; les deux références sont données à titre indicatif.

Bibliographie

- E. Briescorn, H. Knörrer. Plane algebraic curves. *Birkhauser, 1986.*
- R. Hartshorne. Algebraic Geometry. *Graduate texts in math. 52, Springer-Verlag, 1977.*

Contact : `ilia.itenberg@imj-prg.fr`

Cours introductif

Eléments d'analyse pour le master

Nicolas Lerner

Notes de cours : `http://www.math.jussieu.fr/ lerner/index.m2intro.html`.

Présentation

Le cours commencera par une présentation détaillée de la transformation de Fourier des distributions tempérées, qui sera suivie par quelques applications comme la formule de Poisson et la méthode de la phase stationnaire. On abordera ensuite les estimations classiques pour la convolution, inégalité de Young, de Hardy-Littlewood-Sobolev. On démontrera ensuite l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg et les théorèmes d'injection de Sobolev. Le cours se terminera par quelques résultats de base sur le calcul pseudodifférentiel, notamment des résultats de continuité H^s et l'inégalité de Gårding. Ce cours sera utile pour les étudiants souhaitant suivre les cours fondamentaux de C. Laurent et F. Klopp.

Contenu

- Analyse de Fourier et applications
- Inégalités de Young, de Hardy-Littlewood-Sobolev
- Inégalité de Gagliardo-Nirenberg
- Théorèmes d'injection de Sobolev
- Calcul pseudodifférentiel

Prérequis

Une bonne familiarité avec la mesure de Lebesgue et une connaissance sommaire de la transformation de Fourier pourront être utiles.

Bibliographie

– J. Duoandikoetxea. Fourier Analysis. *Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.*

– L. Hörmander. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. *Springer-Verlag, 256.*

– N. Lerner. Metrics on the Phase Space and Non-Selfadjoint Pseudo-Differential Operators. *Birkhäuser Verlag, 2010*

– N. Lerner. A Course on Integration Theory. *Birkhäuser Verlag, 2014*

– C. Sogge. Fourier integrals in classical analysis. *Cambridge Tracts in Mathematics, 105, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.*

– E.M. Stein. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. *with the assistance of Timothy S. Murphy, Princeton Mathematical Series, 43, Monographs in Harmonic Analysis, III, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.*

Contact : `nicolas.lerner@imj-prg.fr`

Cours introductif

Introduction aux surfaces de Riemann

Julien Marché

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

L'objectif de ce cours est de proposer une introduction aux divers aspects algébriques, analytiques et géométriques d'un des objets les plus riches et les plus importants des mathématiques, qui est la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine.

Contenu

- Définition et exemples, courbes elliptiques, courbes algébriques, courbes associées aux fonctions holomorphes.
- Aspects topologiques, genre, triangulation, formule de Riemann-Hurwitz.
- Fibrés en droites, différentielles holomorphes et théorème de Riemann-Roch.
- Faisceaux, cohomologie de Dolbeaut, théorème d'Abel-Jacobi.

Prérequis

Analyse complexe de M1 et bases de topologie et de géométrie différentielle.

Bibliographie

- S. Donaldson. Riemann Surfaces. *Oxford Graduate Texts in Mathematics*
- H. P. de Saint Gervais. Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire.. *Lyon, ENS editions* `http://www.lcdpu.fr/livre/?GCOI=27000100107890&fa=complements`
- N. Bergeron et A. Guilloux. Introduction aux surfaces de Riemann. `http://www.math.jussieu.fr/~bergeron/Enseignement_files/SurfaceDeRiemann.pdf`
- R. Miranda. Algebraic curves and Riemann Surfaces. *Graduate studies in Mathematics*

Contact : julien.marche@imj-prg.fr

Cours introductif

Géométrie différentielle et riemannienne

Vincent Minerbe

Notes de cours : `http://www.math.jussieu.fr/ minerbe/`.

Présentation

Il s'agira d'une introduction à la géométrie différentielle et riemannienne.

Contenu

- Variétés, champs de vecteurs, formes différentielles.
- Fibrés, connexions, courbure.
- Métriques riemanniennes, géodésiques, courbure riemannienne, liens entre courbure et géométrie/topologie.

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle (niveau M1), même si des rappels seront faits.

Bibliographie

- Gallot, Hulin, Lafontaine. Riemannian Geometry.
- Spivak. A comprehensive introduction to differential geometry.
- Petersen. Riemannian Geometry.
- Chavel. Riemannian Geometry: a modern introduction.
- Do Carmo. Riemannian Geometry.

Contact : `vincent.minerbe@imj-prg.fr`

Cours introductif

Topologie différentielle 1

Anton Zorich (Travaux dirigés par Hussein Mourtada)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de faire une passerelle entre le cours de topologie algébrique de base en M1 (où traditionnellement on ne discute pas ou discute peu les variétés) et des cours spécialisés (où on considère les notions de topologie différentielle comme déjà acquises).

Ce cours peut complémenter le cours parallèle de géométrie différentielle et riemannienne de V. Minerbe et le cours "Introduction aux surfaces de Riemann" de J. Marché. Il peut servir d'une bonne préparation pour le cours "Topologie algébrique des variétés" de N.Bergeron et G.Ginot.

La deuxième partie de ce cours (surtout la théorie de Morse) peut être utile pour les cours "Topologie des variétés de petite dimension" et "Homologie de Heegaard-Floer" de Christian Blanchet en deuxième semestre.

Contenu

- Transversalité. Variétés et sous-variétés lisses. L'indice d'intersection, degré d'application.
- Éléments d'homologie et de cohomologie. Cohomologie de de Rham. Complexes cellulaires, homologie cellulaire.
- Variétés de Grassmann et cellules de Schubert, notions de classes caractéristiques.

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de topologie algébrique et de géométrie différentielle de niveau M1.

Bibliographie

- Boris Doubrovin, Anatolii Fomenko, Sergei Novikov. Modern Geometry - Methods and Applications.
- John Milnor. Topology from the differentiable viewpoint.
- William Massey. A basic course in algebraic topology.

Contact : `anton.zorich@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Topologie algébrique des variétés

Nicolas Bergeron et Gregory Ginot (Travaux dirigés par Léo Bénard)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

La topologie algébrique fait un pont entre la géométrie et l'algèbre. Dans ce cours nous nous concentrerons sur l'étude des variétés différentielles.

Le but est de classer, à difféomorphisme près, les variétés différentielles en leur associant des invariants de nature algébrique (nombres entiers, groupes, anneaux, . . .).

Les idées et images issues de la topologie algébrique irriguent l'ensemble des mathématiques modernes. Le but de ce cours est de les exposer dans leur cadre originel en suivant le plan général proposé, il y a près de 130 ans, par Poincaré dans ses mémoires fondateurs sur l'"Analysis Situs". La présentation, le style, les démonstrations et les méthodes employées seront par contre celles du 21ème siècle.

Contenu

– Variétés, homotopie des applications et homotopie entre espaces, rétraction (par déformation), contractibilité, revêtements.

– Notion abstraite de théorie homologique des variétés. Calculs et applications d'une telle théorie.

– Construction d'une théorie homologique. Complexes simpliciaux et polyèdres. Triangulation des variétés. Homologie simpliciale. Formule d'Euler-Poincaré. Homologie Singulière.

– Intersection, dualité de Poincaré et cohomologie.

– Théorème de de Rham PL, cup-produit.

– Groupe fondamental, lien avec l'homologie.

Prérequis

Connaissances de topologie générale et géométrie différentielle de maîtrise. Cela pourra aider d'avoir suivi les cours introductifs de géométrie différentielle et/ou surfaces de Riemann. Il y a par ailleurs un cours introductif à Paris 7 sur le même sujet mais avec un point de vue différent.

Bibliographie

– Allen Hatcher. Algebraic Topology.

– Glen Bredon. Topology and Geometry.

– Claude Godbillon. Eléments de topologie Algébrique.

– William Fulton. Algebraic Topology: a first course .

– William Massey. A basic course in algebraic topology.

– Frédéric Paulin. Topologie algébrique élémentaire. `http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/liste_notescours.html`

Contact : `nicolas.bergeron@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Géométrie complexe et théorie de Hodge

Laurent Charles

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Ce cours est une introduction à la géométrie complexe, c'est-à-dire l'étude des variétés localement isomorphes à un ouvert de $\mathbb{C}^n$. La théorie de Hodge est un outil puissant qui permet de comprendre la topologie de ces variétés. On s'intéressera en particulier aux variétés kähleriennes compactes, qui forment une classe large et importante de variétés complexes.

Contenu

- Variétés complexes, cohomologie de Dolbeault
- Fibrés holomorphes, connexion de Chern
- Laplacien et théorie de Hodge
- Variétés kähleriennes et décomposition de Hodge
- Théorème d'annulation et plongement de Kodaira.

Prérequis

Surfaces de Riemann, géométrie différentielle (entre autres cohomologie de de Rham).

Bibliographie

- Huybrecht. Complex geometry: an introduction.
- Wells. Differential analysis on complex manifolds.

Contact : `laurent.charles@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Théorie algébrique des nombres

Pierre-Henri Chaudouard

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est d'introduire des notions fondamentales en théorie algébrique des nombres.

Contenu

- Étude des corps locaux
- Corps globaux et leurs complétions
- Adèles et Idèles
- Théorie de Fourier sur les adèles
- Thèse de Tate

Prérequis

Notions d'algèbre commutative (modules, anneaux principaux, de Dedekind), théorie de Galois. Quelques notions élémentaires d'analyse complexe et d'analyse de Fourier.

Bibliographie

- J. Cassels, J. Fröhlich. Algebraic number theory.
- S. Lang. Algebraic number theory.
- D. Ramakrishnan, R. Valenza. Fourier Analysis on Number Fields.
- J-P Serre. Corps locaux.
- A. Weil. Basic Number theory.

Contact : pierre-henri.chaudouard@imj-prg.fr

Cours fondamental 1

Théorie de Lie et représentations II

David Hernandez (Travaux dirigés par Luca Moci)

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

La théorie des représentations, notamment des algèbres de Lie, est un sujet central en mathématiques qui a de nombreuses applications à d'autres branches des mathématiques (géométrie, théorie des nombres, combinatoire, topologie...) mais aussi en physique théorique (systèmes intégrables quantiques, théorie conforme des champs...).

Le but de ce cours est double : d'une part (cours I) donner une introduction aux concepts et outils classiques de la théorie de Lie, notamment en théorie des représentations, et d'autre part (cours II) étudier des généralisations (de dimension infinie et quantiques) ainsi que certaines de leurs applications importantes.

Contenu

– Structure des algèbres de Kac-Moody symétrisables.

– Catégorie des représentations intégrables dans la catégorie O.

– Algèbres de lacets et extensions. Isomorphisme entre les présentations des algèbres affines.

– Catégorie des représentations de dimension finie. Représentations d'évaluation. Paramétrisation des représentations simples par les polynômes de Drinfeld.

– Groupes quantiques, équation de Yang-Baxter quantique et R-matrice universelle.

– Anneau de Grothendieck et q-caractères, matrices de transfert, spectre quantique et systèmes intégrables quantiques.

Prérequis

Cours Théorie de Lie et représentations I

Bibliographie

– V. Kac. Infinite-dimensional Lie algebras. *Cambridge University Press, Cambridge, 1990*

– D. Hernandez. An Introduction to Affine Kac-Moody Algebras. *CTQM Master Class Series 2 (2006), 1–20*

– V. Chari and A. Pressley. A guide to quantum groups. *Cambridge University Press, Cambridge, 1995*

– P. Etingof, I. Frenkel and A. Kirillov. Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations. *Mathematical Surveys and Monographs, 58. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998*

– E. Frenkel. Langlands correspondence for loop groups. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 103. Cambridge University Press, Cambridge, 2007*

Contact : `david.hernandez@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Courbes elliptiques

Marc Hindry (Travaux dirigés par Dominique Bernardi)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de présenter les bases de la théorie des courbes elliptiques, principalement du point de vue de la géométrie et de l'arithmétique. On démontrera notamment les deux principaux théorèmes diophantiens classiques de Siegel (finitude des points entiers) et Mordell-Weil (génération finie du groupe des points rationnels) et on abordera quelques outils utilisés notamment dans les travaux de Wiles : courbes modulaires et représentations galoisiennes.

Contenu

- Fonctions elliptiques
- Loi de groupe algébrique sur une courbe elliptique
- théorèmes de Mordell-Weil (points rationnels) et Siegel (points entiers)
- Hauteur de Néron-Tate
- Fonction L d'une courbe elliptique
- Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer

Prérequis

Les prérequis sont minimaux, essentiellement un peu de théorie algébrique des nombres et un cours d'introduction à la géométrie algébrique (vocabulaire et théorème de Riemann-Roch sur les courbes).

Bibliographie

- Silverman. arithmetic of elliptic curves. *Spinger GTM 1986*
- Silverman. advanded topics arithmetic of elliptic curves. *Springer GTM 1994*
- Nekovar. notes de cours. `http://webusers.imj-prg.fr/~jan.nekovar/co/ln/el/`

Contact : marc.hindry@imj-prg.fr

Cours fondamental 1

Prolongement unique et applications

Camille Laurent

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Dans ce cours, on s'intéressera à la propriété suivante de prolongement unique pour certaines classes d'opérateurs différentiels P:

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et un petit ouvert $U \subset \Omega$, a-t-on la propriété?

$$Pu = 0 \text{ sur } \Omega, \quad u|_U = 0 \Longrightarrow u = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Dans certains cas, on s'intéressera à la quantification de ces résultats, c'est-à-dire

$$Pu \text{ petit sur } \Omega, \quad u \text{ petit sur } U \Longrightarrow u \text{ petit sur } \Omega.$$

L'outil principal sera les inégalités de Carleman. On donnera aussi des applications au contrôle exact ou approché de la chaleur ou des ondes.

Si le temps le permet, on discutera aussi de la version haute fréquence et de la contrôlabilité exacte des ondes sous la condition de contrôle géométrique.

Contenu

– Inégalités de Carleman pour des opérateurs elliptiques: application au contrôle de la chaleur

– Prolongement unique pour des opérateurs réels indépendants d'une variable: application au contrôle approché des ondes

Prérequis

Cours Introductif *Éléments d'analyse pour le Master* de Nicolas Lerner

Bibliographie

– Jérôme Le Rousseau et Gilles Lebeau. On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var., 18(3):712–747, 2012*

– Lars Hörmander. The Analysis of Linear Partial Differential Operators, volume IV, chap 28. *Springer-Verlag, Berlin, 1994.*

– Lars Hörmander. On the uniqueness of the Cauchy problem under partial analyticity assumptions. *In Geometrical optics and related topics (Cortona, 1996), volume 32 of Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., pages 179–219. Birkhauser Boston, Boston, MA, 1997.*

Contact : `laurent@ann.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Systèmes dynamiques I

Patrice LE CALVEZ

Présentation

Introduire les notions de base ainsi que les exemples classiques des systèmes dynamiques

Contenu

- Dynamique topologique
- Introduction à la théorie ergodique, théorème ergodiques (Von Neumann, Birkhoff)
- Théorie spectrale
- Homéomorphismes du cercle (nombre de rotation de Poincaré, théorème de Denjoy)
- Entropie métrique

Prérequis

Topologie, théorie de la mesure, analyse réelle.

Bibliographie

– A. KATOK, B. HASSELBLATT . Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Cambridge University Press.*

– P. WALTERS . An introduction to ergodic theory. *Graduate Texts In Mathematics, Springer-Verlag*

Contact : patrice.le-calvez@imj-prg.fr

Cours fondamental 1

Algèbre homologique et cohomologie des faisceaux

François Loeser (Travaux dirigés par Mathieu Florence)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le point de vue catégorique, l'algèbre homologique ainsi que les faisceaux et leur cohomologie dont des outils de base dans tous les domaines relevant de l'algèbre ou de la topologie. L'objet de ce cours est d'en présenter les bases en gardant en vue les applications potentielles.

Contenu

- Le langage des catégories. Foncteurs adjoints. Limites et colimites.
- Catégories abéliennes. Objets injectifs et projectifs. Foncteurs dérivés.
- Faisceaux et cohomologie

Bibliographie

- Roger Godement. Topologie algébrique et théorie des faisceaux . *Hermann Editeurs*
- Pierre Schapira. Algebra and Topology. `http://webusers.imj-prg.fr/~pierre.schapira/lectnotes/AlTo.pdf`

Contact : `Francois.Loeser@imj-prg.fr`

Cours fondamental 1

Topologie différentielle 2

Anton Zorich

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de faire une passerelle entre le cours de topologie algébrique de base en M1 (où traditionnellement on ne discute pas ou discute peu les variétés) et des cours spécialisés (où on considère les notions de topologie différentielle comme déjà acquises).

C'est la deuxième partie de cours. Elle peut être utile pour les cours spécialisés "Topologie des variétés de petite dimension" et "Homologie de Heegaard-Floer" de Christian Blanchet en deuxième semestre. Ce cours peut servir d'un cours complémentaire pour la "Topologie algébrique des variétés" de N. Bergeron et G. Ginot.

Contenu

- Théorie de Morse
- Les notions de feuilletages et de systèmes dynamiques lisses

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de topologie algébrique et de géométrie différentielle de niveau M1 et/ou le cours "Topologie différentielle 1".

Bibliographie

- John Milnor. Morse Theory.

Contact : `anton.zorich@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Topologie des variétés de petite dimension

Christian Blanchet

Notes de cours : `http://webusers.imj-prg.fr/~christian.blanchet/enseignement/`

Présentation

Le but du cours est d'introduire à l'étude topologique des variétés de dimension 3 et 4 et de leurs invariants, notamment les invariants quantiques en dimension 3.

Contenu

- Construction de variétés de dimension 3 et 4.
- Théorie classique des noeuds et entrelacs, construction d'invariants.
- Présentations des variétés de dimension 3, construction d'invariants.
- Cobordisme, TQFT.
- Présentations des variétés de dimension 4, calcul des invariants classiques.

Prérequis

Topologie algébrique: homologie. Notions de base sur les variétés différentielles.

Bibliographie

- Rolfsen. Knots and Links. *AMS Chelsea Publishing.*
- Gompf, Stipsicz. 4-Manifolds and Kirby Calculus. *AMS Grad. Studies in Maths Vol 20.*
- Turaev. Quantum Invariants of Knots and 3-manifolds. *De Gruyter.*

Contact : `christian.blanchet@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Géométrie d'Arakelov birationnelle I

Huayi CHEN

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Le but de ce cours est de présenter des notions de base de la géométrie d'Arakelov et des avancements récents dans l'étude des invariants arithmétiques birationnels. La géométrie d'Arakelov est une théorie de la géométrie arithmétique, qui relie naturellement plusieurs domaines mathématiques, comme géométrie algébrique, théorie des nombres, géométrie analytique etc, où divers outils mathématiques interviennent activement.

La première partie du cours porte sur la base de la géométrie d'Arakelov, mais présentée dans un langage plus moderne, notamment celui des courbes adéliques. Ce point de vue permet non-seulement de traiter toutes les places d'un corps de nombres d'une manière équitable, mais encore d'unifier l'étude de la géométrie arithmétique relativement à différentes situations : corps de nombres, corps de fonctions, corps avec la valuation triviale, variété (arithmétique) polarisée etc. Certains outils de la géométrie algébrique utilisés dans la présentation de cette théorie seront aussi abordés.

Contenu

- diviseur, fibré vectoriels, positivité (amplitude, effectivité numérique etc.), variétés projectives
- cycles algébriques dans une variété, intersection d'un cycle avec un diviseur de Cartier
- courbes arithmétiques, géométrie des nombres
- courbe adélique, fibrés vectoriels adéliques et leur géométrie
- variété arithmétique sur une courbe adélique, diviseurs adéliques
- intersection de diviseurs adéliques, théorème de Hilbert-Samuel arithmétique

Prérequis

cours de géométrie algébrique et de théorie des nombres

Contact : `huayi.chen@ujf-grenoble.fr`

Cours fondamental 2

Introduction à la géométrie hyperbolique

Elisha Falbel (Travaux dirigés par Andrés Sambarino)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours est une introduction à la géométrie hyperbolique. On présentera des théorèmes fondamentaux de la théorie en dimension 2 et en dimension 3.

Contenu

- Surfaces hyperboliques
- Espaces de Teichmüller
- Théorème de Mostow
- Dimension 3 - chirurgie de Dehn

Bibliographie

- M. Kapovich. Hyperbolic manifolds and discrete groups. *Birkhauser 2009*
- R. Benedetti, C. Petronio. Lectures on hyperbolic geometry. *Universitext, Springer 1992*

Contact : `elisha.falbel@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Théorie spectrale des opérateurs aléatoires

Frédéric Klopp

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours se veut une présentation de résultats récents sur la théorie spectrale des opérateurs aléatoires dans le régime localisé par le biais du modèle le plus simple, le modèle d'Anderson.

Introduits en physique de la matières condensée dans les années 50, les opérateurs aléatoires modélisent la propagation des électrons dans un milieu désordonnée. L'hypothèse stochastique se justifie par la présence homogène d'impuretés dont seules sont connues des caractéristiques macroscopiques comme la densité.

Le caractère aléatoire et homogène du potentiel confère aux opérateurs aléatoires de nombreuses propriétés intéressantes, en particulier, une propriété d'ergodicité qui assure que, de nombreux points de vue, la famille d'opérateur se comporte comme un opérateur unique. Cette liberté est alors exploitée pour l'étude de ces opérateurs.

L'une des caratéristiques de ces modèles est la présence d'un régime localisé i.e. d'intervalles dans le spectre qui ne sont constitués que de spectre ponctuel et tel que les fonctions propres associées aux valeurs propres dans ces intervalles sont à décroissance exponentielle.

L'analyse des opérateurs aléatoires se situe aux confins de plusieurs domaines des mathématiques, la théorie spectrale et celle des probabilités mais aussi de l'analyse harmonique et de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Contenu

- L'ergodicité et ses conséquences. La densité d'états intégrée.
- Estimée de Wegner.
- Le régime localisé. La méthode des moments fractionnaires.

Prérequis

Analyse réelle et complexe ; analyse fonctionnelle.

Bibliographie

- Werner Kirsch. An invitation to random Schrödinger operators. In Random Schroedinger operators. *volume 25 de Panor. Syntheses, pages 1-119. Soc. Math. France, Paris, 2008.*
- Leonid Pastur and Alexander Figotin. Spectra of random and almost-periodic operators. *volume 297 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1992*

Contact : frederic.klopp@imj-prg.fr

Cours fondamental 2

Introduction à la dynamique hyperbolique

Frédéric Le Roux

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est de présenter une introduction à la théorie des systèmes dynamiques (uniformément) hyperboliques à partir d'exemples simples, dans le cas à temps discret ou temps continu. Nous étudierons en particulier les perturbations des automorphismes hyperboliques du tore et illustrerons sur cet exemple les notions fondamentales de variétes stables/instables et de stabilité structurelle. Puis nous aborderons l'étude des propriétés ergodiques des flots géodésique et horocyclique sur les surfaces hyperboliques (quotients hyperboliques du demi-plan de Poincaré).

Contenu

– Rappels de théorie ergodique et de théorie spectrale des systèmes dynamiques.

– L'application d'Arnold sur le tore $\mathbb{T}^2$. Directions stable/instable, argument de Hopf, ergodicité, mélange. Partitions de Markov.

– Perturbations des automorphismes hyperboliques du tore : notion de variétes stable/instable. Théorème de la variété stable. Stabilité structurelle.

– Le demi-plan de Poincaré, géométrie hyperboliques, SL(2,R), quotient, surfaces hyperboliques.

– Flot géodésique, horocyclique, identification des variétés stables/instables. Ergodicité du flot géodésique, mélange.

– Unique ergodicité du flot horocyclique (surfaces compactes), mélange.

Prérequis

Cours Math Fondamental Systèmes Dynamique 1

Bibliographie

– B. Bekka, M. Mayer. Ergodic Theory and Topological Dynamics for Group Actions on homogeneous Spaces.

Contact : `frederic.le-roux@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Introduction aux schémas et à leur cohomologie

François Loeser (Travaux dirigés par Mathieu Florence)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce premier cours de théorie des schémas mettra l'accent sur le point de vue cohomologique.

Contenu

– "Rappels" d'algèbre commutative incluant le théorème des zéros de Hilbert, le lemme de normalisation de Noether et le théorème de l'idéal principal de Krul

– Schémas: définitions de base et exemples

– Les faisceaux cohérents et leur cohomologie. Caractérisation cohomologique des schémas affines. Faisceaux amples et finitude de la cohomologie dans le cas projectif.

– Dualité de Serre et applications.

Prérequis

Le cours introductif de I. Itenberg. Le cours fondamental 1 Algèbre homologique et cohomologie des faisceaux.

Bibliographie

– Robin Hartshorne. Algebraic Geometry. *Springer GTM*

– Antoine Ducros. Introduction à la théorie des schémas. `http://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/polym2.pdf`

Contact : `Francois.Loeser@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Formes modulaires et leurs propriétés arithmétiques

Alberto Minguez

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Les formes modulaires sont des fonctions méromorphes sur le demi-plan de Poincaré satisfaisant une propriété d'invariance pour l'action d'un sous-groupe convenable Γ de $SL_2(\mathbb{Z})$. Malgré une définition d'apparence analytique-complexe, ces fonctions recèlent des propriétés arithmétiques remarquables, encodées dans leurs coefficients de Fourier.

La forte cohérence de ces coefficients de Fourier se lit déjà sur la série génératrice de Dirichlet qui leur est associée. On peut en effet montrer que, pour une forme modulaire "primitive", cette série converge sur un demiplan $Re(s) >> 0$ et admet un prolongement méromorphe et une certaine équation fonctionnelle. Ces propriétés rappellent étrangement celles de la fonctions ζ de Riemann par exemple, ou plus généralement des fonctions L de corps de nombres, et plus généralement encore, celles des fonctions L associées aux représentations complexes du groupe de Galois d'un corps de nombres Galoisien sur $\mathbb{Q}$.

Cette ressemblance n'est pas fortuite. Shimura et Deligne ont en effet montré l'existence, pour toute forme modulaire "primitive" f, d'une unique représentation Galoisienne *ℓ-adique* de dimension 2 du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ telle que pour presque tout nombre premier p, la trace d'une substitution de Frobenius en p soit exactement le p-ème coefficient de Fourier de f.

Le cours se propose d'expliquer ce résultat dans le cas le plus simple.

Contenu

- Formes modulaires. Définition, exemples.
- Courbes modulaires comme surfaces de Riemann. Interprétation géométrique d'une forme modulaire.
- Opérateurs de Hecke, formes propres et coefficients de Fourier.
- fonction L d'une forme modulaire primitive.
- Algébrisation des courbes modulaires.
- Relation de congruence d'Eichler-Shimura.

Prérequis

Surfaces de Riemann. Courbes elliptiques. Théorie des Nombres. Une lecture préalable de ce qu'est la Jacobienne d'une surface de Riemann pourrait aider.

Bibliographie

- F. Diamond - J. Shurman. A first course in Modular Forms. *GTM 228 Springer*
- T. Miyake. Modular forms. *Springer Mongraphs in Mathematics*
- J.-P. Serre. Cours d'arithmétique.

Contact : `alberto.minguez@imj-prg.fr`

Cours fondamental 2

Groupes réductifs et représentations

Patrick Polo

Notes de cours : `http://webusers.imj-prg.fr/~patrick.polo/`

Présentation

Le but du cours est de donner un aperçu de la classification des groupes réductifs déployés sur un corps k et de leurs représentations irréductibles. On commencera par les systèmes de racines et leur groupe de Weyl. Puis, après des généralités sur les groupes algébriques sur un corps, on introduira les groupes diagonalisables puis les groupes réductifs déployés et leur donnée radicielle, en admettant les théorèmes de conjugaison. On donnera ensuite la classification des représentations irréductibles en termes des poids dominants.

Contenu

- Systèmes de racines, groupes de Weyl, données radicielles.
- Groupes groupes algébriques sur un corps k et morphismes.
- Groupes diagonalisables et caractères. Tores déployés.
- Groupes réductifs déployés et leur donnée radicielle.
- Poids dominants et représentations irréductibles.

Prérequis

Le cours fondamental I de F. Loeser et, si possible, son cours fondamental II.

Bibliographie

– J. E. Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory. *GTM 9, Springer-Verlag.*

– T. A. Springer. Linear algebraic groups (2nd ed.). *PM 9, Birkhäuser*

– J. C. Jantzen. Representations of algebraic groups (2nd ed.). *MSM 107, Amer. Math. Soc.*

– W. C. Waterhouse. Introduction to affine group schemes. *GTM 66, Springer-Verlag*

Contact : `patrick.polo@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Dynamiques et spectres

Viviane Baladi

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le spectre des opérateurs de transfert de Ruelle-Perron-Frobenius est utilisé depuis plus de 40 ans pour comprendre certaines propriétés ergodiques des dynamiques chaotiques. Depuis une dizaine d'années, la puissance de cet outil a été démultipliée par l'introduction de "bons" espaces sur lesquels faire agir ces opérateurs. Ceci a permis de débloquer des problèmes en attente depuis des décennies (p. ex. conjecture de Smale sur la fonction zêta dynamique [Giulietti-Liverani-Pollicott]). Récemment, des méthodes semi-classiques ont permis d'obtenir des résultats très intéressants dans le cadre lisse (par exemple pour des flots géodésiques en courbure variable [Gouezel]). Dans ce cours, qui donnera une ouverture sur de nombreux sujets de recherche actuels, nous aborderons des constructions plus pédestres, dont la flexibilité permet d'obtenir des résultats fins en basse régularité, voire en présence de singularités.

Contenu

- L'opérateur de transfert pour le modèle-jouet de la dynamique dilatante ou dilatante par morceaux. (Espaces de Banach ou de Hilbert de fonctions.)
- Conséquences des propriétés spectrales (vitesse de mélange, fonctions zêta, théorèmes limites, stabilité stochastique, réponse linéaire...).
- L'opérateur de transfert des dynamiques hyperboliques différentiables. (Espaces de Banach ou de Hilbert de distributions anisotropes.)
- Si le temps le permet: quelques mots sur les dynamiques hyperboliques ou dilatantes à temps continu.

Prérequis

Eléments de théorie ergodique et dynamique (p. ex. cours Math. Fondamental de P. Le Calvez). Des notions de dynamique hyperbolique (p. ex cours de F. Le Roux) seraient utiles. Bases d'analyse fonctionnelle (des rappels seront faits).

Bibliographie

- V. Baladi. Positive Transfer Operators and Decay of Correlations. *Book Advanced Series in Nonlinear Dynamics, Vol 16, World Scientific, Singapore (2000)*
- V. Baladi et M. Tsujii. Dynamical determinants and spectrum for hyperbolic diffeomorphisms. *pp. 29–68, in Contemp. Math. 469 (Amer. Math. Soc.) (2008).* `http://www.math.ens.fr/~baladi/DynDet.pdf`
- P. Giulietti, C. Liverani et M. Pollicott. Anosov Flows and Dynamical Zeta Functions. *Annals of Mathematics, 178 (2013) 687–773* `http://annals.math.princeton.edu/2013/178-2/p06`
- S. Gouëzel. Spectre du flot géodésique en courbure négative [d'après F. Faure et M. Tsujii]. *Séminaire Bourbaki 21/3/2015* `http://www.bourbaki.ens.fr/TEXTES/1098.pdf`

Contact : `viviane.baladi@ens.fr`

Cours spécialisé

Homologie de Heegaard-Floer

Christian Blanchet

Notes de cours : `http://webusers.imj-prg.fr/~christian.blanchet/enseignement/`

Présentation

Le but du cours est de construire l'homologie de Heegaard-Floer des variétés de dimension 3, d'établir ses propriétés de chirurgie et de présenter quelques calculs et applications.

Contenu

- Diagrammes en grilles et homologie de Heegaard-Floer combinatoire
- Topologie des espaces symétriques
- Définitions des complexes de Heegaard-Floer
- Triangles holomorphes
- Homologie de Heegaard-Floer des noeuds

Prérequis

Topologie algébrique : homologie. Topologie différentielle, théorie de Morse. Variétés, description en dimension 3 et 4, diagrammes de Heegaard, chirurgie.

Bibliographie

- Manolescu, Ozsvath, Sarkar. A combinatorial description of knot Floer homology. *Annals of Mathematics, Vol. 169 (2009), 633-660*
- Ozsvath, Peter; Szabó, Zoltán. Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds. *Ann. of Math. (2) 159 (2004), no. 3, 1027-1158*
- Ozsvath, Peter; Szabó, Zoltán. Introduction to Heegaard Floer homology. `http://math.mit.edu/~petero/Introduction.pdf`

Contact : christian.blanchet@imj-prg.fr

Cours spécialisé

Géométrie d'Arakelov birationnelle II

Huayi Chen

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Le but de ce cours est de présenter des notions de base de la géométrie d'Arakelov et des avancements récents dans l'étude des invariants arithmétiques birationnels. La géométrie d'Arakelov est une théorie de la géométrie arithmétique, qui relie naturellement plusieurs domaines mathématiques, comme géométrie algébrique, théorie des nombres, géométrie analytique etc, où divers outils mathématiques interviennent activement.

La deuxième partie du cours porte sur des résultats récents dans la géométrie d'Arakelov birationnelle, en mettant un accent sur ses liens avec la géométrie convexe et l'approche probabiliste. Selon l'avancement du cours et la préférence des auditeurs, on traitera l'ensemble ou une partie des sujets suivants.

Contenu

- fonction volume d'un diviseur adéliques, positivité arithmétique (amplitude, grosseur etc.)
- variétés toriques sur une courbe adélique, diviseurs adéliques toriques, hauteur
- corps d'Okounkov et son variant arithmétique, théorèmes de limite en géométrie d'Arakelov
- décomposition de Zariski et approximation de Fujita d'un diviseur adélique
- convexité des invariants arithmétiques, inégalités de Brunn-Minkowski et isopérimétrique
- diverses applications

Prérequis

cours de géométrie algébrique et de théorie des nombres

Contact : `huayi.chen@ujf-grenoble.fr`

Cours spécialisé

Courbes spin, factorisations matricielles et symétrie miroir

Alessandro Chiodo

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Nous commencerons par des exemples explicites d'un phénomène qui à un premier abord semble non relié aux courbes spin : des couples (X,Y) de variétés de Calabi-Yau de dimension trois qui sont duales au sens de la symétrie miroir: $h^{p,q}(X;C) = h^{3-p,q}(Y;C)$. Nous formulerons un énoncé plus général et une preuve qui permettra de présenter une approche (Fan-Jarvis-Ruan, Polishchuk-Vaintrob) de la cohomologie quantique des variétés de Calabi-Yau par le biais des courbes r-spin. Ces dernières sont des courbes algébriques munies d'un fibré L dont la r-ième puissance est isomorphe au fibré canonique. La géométrie de leurs espaces de modules est encore largement inexplorée et des techniques récentes donnent accès à des nouveaux problèmes ouverts. Nous nous concentrerons sur une construction en termes de factorisations matricielles, elle est due à Polishchuk et Vaintrob et elle a récemment permis des nouveaux approches au problème du calcul des nombres d'intersection virtuels en cohomologie quantique.

Contenu

- Espaces des modules des courbes stables
- Cohomologie quantique
- Factorisations matricielles
- Symétrie miroir

Bibliographie

– Arbarello, Cornalba, Griffiths, Harris. Geometry of Algebraic Curves vol I et II. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 267 et 268* `http://www.springer.com/series/1720`

– Fan, Jarvis, Ruan. The Witten equation, mirror symmetry, and quantum singularity theory. *Annals of Mathematics, 178 (2013), no. 1, 1-106.* `http://annals.math.princeton.edu/2013/178-1/p01`

– Polishchuk, Vaintrob. Matrix factorizations and cohomological field theories. *Journal fÃ¼r die reine und angewandte Mathematik, Ã paraître* `arXiv:1105.2903`.

Contact : alessandro.chiodo@imj-prg.fr

Cours spécialisé

Statistiques spectrales des opérateurs aléatoires

Frédéric Klopp

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours se veut une présentation de résultats récents sur les statistiques spectrales des opérateurs aléatoires dans le régime localisé par le biais du modèle le plus simple, le modèle d'Anderson.

L'une des caratéristiques de ce modèle est la présence d'un régime localisé i.e. d'intervalles dans le spectre qui ne sont constitués que de spectre ponctuel et tel que les fonctions propres associées aux valeurs propres dans ces intervalles sont à décroissance exponentielle. Le cours de propose d'éxplorer les caractéristiques statistiques de ces valeurs propres et des vecteurs propres associés.

Contenu

- Le régime localisé. Centres de localisation.
- Estimée de Minami. Estimées de décorrélation.
- Statistiques spectrales locales. Statistiques des espacements

Prérequis

Cours fondamental 2 : théorie spectrale des opérateurs aléatoires

Bibliographie

– Werner Kirsch. An invitation to random Schrödinger operators. In Random Schroedinger operators. *volume 25 de Panor. Syntheses, pages 1-119. Soc. Math. France, Paris, 2008.*

– Leonid Pastur and Alexander Figotin. Spectra of random and almost-periodic operators. *volume 297 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1992*

Contact : frederic.klopp@imj-prg.fr

Cours spécialisé

Théorie géométrique des invariants

Julien Marché

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

La théorie géométrique des invariants trouve ses racines dans les travaux des géomètres du 19ème siècle. Elle est aujourd'hui un outil fondamental pour construire des espaces de modules en géométrie algébrique. Ce cours présentera la théorie générale du point de vue de Mumford en mettant l'accent sur des exemples concrets tels que l'espace de modules de courbes elliptiques et les variétés de caractères.

Contenu

- Quotients de variétés algébriques
- Notion de (semi-)stabilité
- Critère de Hilbert-Mumford
- Exemples provenant de la géométrie algébrique, comme l'espace des modules des courbes elliptiques.
- Théorème de Kempf-Ness

Prérequis

Géométrie complexe et/ou algébrique

Bibliographie

- Mumford, Fogarty et Kirwan. Geometric invariant theory.
- Mumford et Suominen. Introduction to the theory of moduli.
- Newstead. Introduction to moduli problems and orbit spaces.
- Dolgachev. Lectures on invariant theory.

Contact : `marche@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Introduction aux schémas en groupes

Patrick Polo

Notes de cours : `http://webusers.imj-prg.fr/~patrick.polo/`

Présentation

Le but du cours est d'introduire à la théorie des schémas en groupes (de type fini) sur un corps. Par rapport à la théorie classique présentée dans les livres de Borel ou Springer, on s'autorise à considérer des schémas en groupes non réduits, comme le groupe des racines p-ièmes de l'unité sur un corps de caractéristique p. Cette flexibilité permet de simplifier certains aspects de la théorie, notamment la discussion des questions de séparabilité. On insistera aussi sur la définition de certains schémas en groupes (ou quotients) en termes des foncteurs qu'ils représentent.

Contenu

– Foncteurs représentables et lemme de Yoneda.

– Schémas en groupes sur un corps.

– Construction des quotients G/H.

– Applications: démonstration des thm. de conjugaison des tores maximaux et sous-groupes de Borel.

– Si le temps le permet: schémas en groupes réductifs déployés sur Z

– ou bien, au contraire, un aperçu du cas non déployé: groupes semi-simples sur R.

Prérequis

Mon cours fondamental II (et, si possible, celui de F. Loeser).

Bibliographie

– J. C. Jantzen. Representation of algebraic groups (2nd ed.). *MSM 107, Amer. Math. Soc.*

– W. C. Waterhouse. Introduction to affine group schemes. *GTM 66, Springer-Verlag*

– M. Demazure, A. Grothendieck. SGA3, t.1 et 3, nouvelle édition. *DM 7 et 8, Soc. Math. France*

– M. Demazure, P. Gabriel. Groupes algébriques. *Masson et North-Holland*

Contact : `patrick.polo@imj-prg.fr`

Cours spécialisé

Formes modulaires p-adiques

Benjamin Schraen

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Il existe de curieuses congruences entre les coefficients des formes modulaires. Une explication à ce phénomène est l'existence de familles p-adiques de formes modulaires. L'objectif du cours est de présenter la notion de forme modulaire p-adique et quelques-unes de ses applications arithmétiques.

Contenu

- Formes modulaires p-adique et modulo p.
- Courbes modulaires.
- Familles p-adiques.
- Représentations galoisiennes.
- Déformations de représentations galoisiennes, anneaux de déformation.
- Quelques cas particuliers de modularité.

Prérequis

Cours "Formes modulaires et leurs propriétés arithmétiques". Familiarités avec la théorie des schémas.

Bibliographie

- N. Katz. P-adic properties of modular schemes and modular forms. *Lecture Notes in Mathematics 350*
- J.-P. Serre. Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques. *Lecture Notes in Mathematics 350*
- F. Gouvêa. Arithmetic of p-adic modular forms. *Lecture Notes in Mathematics 1304*
- R. Coleman et B. Mazur. The eigencurve. *London Math. Soc. Lecture Note Ser. 254*

Contact : `benjamin.schraen@math.cnrs.fr`