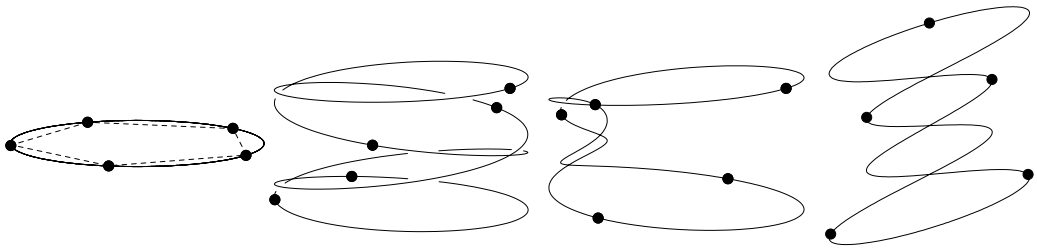
Université Pierre et Marie Curie (Paris vi)

Master Sciences et Technologie
Mention Mathématiques et Applications

M2 de Mathématiques fondamentales

Année universitaire 2013–2014

Responsables : Jean-François Dat et Tien Cuong Dinh



Secrétariat : Mme L. Dreyfuss

Campus de Jussieu, 1er étage, couloir 15-25, bureau 1.09)
4, place Jussieu, 75005 Paris

Tél & Fax 01 44 27 85 45
Mél `master.math.fond@upmc.fr`
Url `http://www.master.math.upmc.fr/mathfond/`

La figure en couverture est une famille de solutions quasipériodiques à deux fréquences, et périodiques modulo rotation, bifurquant à partir d'un équilibre relatif (point fixe modulo rotation) du problème des 5 corps, le pentagone régulier à 5 masses égales. Dans le repère ici choisi, la famille possède une symétrie d'ordre 20 contenant la symétrie chorégraphique, imposant à tous les corps de se poursuivre le long de la même courbe fermée à intervalle de temps fixé. La dernière solution tracée est plane, et périodique en repère fixe.

Table des matières

1 Le M2 de Mathématiques fondamentales **5**

Parcours “Mathématiques Recherche” 5

Parcours “Mathématiques Avancées” 5

2 Organisation et déroulement du M2 **6**

Parcours “Mathématiques Recherche” 6

Parcours “Mathématiques Avancées” 7

Télé-enseignement 7

3 Inscription et candidature **8**

4 Cours de l’année 2013-2014 **10**

5 Description des cours **11**

5.1 Cours introductifs (9 sept. - 18 oct. 2013) **11**

Quelques outils de base en analyse 11

Introduction à la théorie algébrique des nombres 12

Algèbres de Lie semi-simples et leurs représentations 13

Les outils de la géométrie algébrique 14

Introduction aux surfaces de Riemann 15

Géométrie et topologie différentielle 16

5.2 Cours fondamentaux I (5 nov. - 16 déc. 2013) **17**

Topologies différentielle et algébrique des variétés 17

Introduction à la théorie des schémas 18

Une introduction à l’analyse semi-classique 19

Systèmes dynamiques I 20

Groupes algébriques linéaires et groupes réductifs 21

Théorie des nombres 22

Géométrie riemannienne 23

5.3 Cours fondamentaux II (13 janv. - 21 fév. 2014) **24**

Géométrie complexe et théorie de Hodge 24

Une introduction à la théorie de Hodge p-adique 25

Cohomologie étale et conjectures de Weil 26

Systèmes dynamiques II 27

Inégalités de Carleman 28

Déformations de représentations galoisiennes p-adiques 29

Groupes réductifs 2 30

5.4 Cours spécialisés (3 mars - 11 avril 2014) 31

Géométrie birationnelle en dimension supérieure: le programme des modèles minimaux 31

Structure des groupes fondamentaux des variétés riemanniennes. 33

Introduction à la théorie de Deligne–Lusztig 34

Théorie de Hodge p-adique: le point de vue de la courbe 35

Analyse sur les espaces métriques mesurés 36

Cohomologie étale et conjectures de Weil 37

1 Le M2 de Mathématiques fondamentales

La spécialité *Mathématiques fondamentales* est une option de la mention *Mathématiques et Applications* du *Master de Sciences et Technologie* de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Elle s'adresse aux étudiants titulaires d'un M1 de mathématiques ou d'un titre équivalent et comprend deux parcours : "Mathématiques Recherche" et "Mathématiques avancées".

Un large spectre des mathématiques fondamentales est généralement couvert, avec des variations selon les années : théorie des nombres, géométrie algébrique, théorie de Lie, géométries analytique et différentielle, systèmes dynamiques, analyse fonctionnelle, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles, etc.

Parcours "Mathématiques Recherche"

Ce parcours, assez exigeant, s'adresse à tous les étudiants se destinant à un doctorat en Mathématiques fondamentales. Une fois ce doctorat accompli, les débouchés naturels sont les métiers de la recherche et de l'enseignement supérieur, au CNRS, à l'université ou dans les centres de recherche des grandes entreprises. Ces diplômes devraient aussi être un gage de puissance et de créativité intellectuelles suffisant pour intéresser les entreprises de haute technologie, comme c'est déjà le cas pour des diplômes équivalents en Allemagne, au Royaume Uni et aux Etats-Unis.

Parcours "Mathématiques Avancées"

Ce parcours, plus abordable, intéressera les étudiants dont le but principal est de valider le Master, sans poursuivre en doctorat. Les cours proposés sont essentiellement les mêmes que pour le parcours "Recherche", mais les règles de validation sont assouplies, et il est aussi possible de valider certains cours de M1 avancés. Ce parcours est particulièrement bien adapté aux étudiants désirant préparer l'*agrégation*. Une fois validé leur M2, ceux-ci pourront suivre la prépa agreg de la Faculté de Mathématiques.

Les détails des règles permettant de valider l'un ou l'autre des parcours se trouvent sur la page "Organisation" de cette brochure.

2 Organisation et déroulement du M2

Comme tout M2, le cursus comprend des *cours* et un *stage*. Les règles de validation dépendent du parcours envisagé.

Les cours se répartissent en 4 périodes de 6 semaines, regroupées de la façon suivants :

- cours d'introduction de 24 heures sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours fondamentaux I et II, de 24 heures plus 12 heures de TD, sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours spécialisés, en général de 24h sur 6 semaines (9 ECTS chacun).

En règle générale, la validation de chaque cours est conditionnée par la réussite à un examen écrit qui se tient à la fin de l'enseignement concerné. Une session de rattrapage pourra être organisée en juin, si nécessaire : les étudiants intéressés par un rattrapage devront contacter directement les enseignants. Pour les cours spécialisés, la validation peut prendre d'autres formes : examen oral, mini-mémoire de synthèse sur un thème connexe, etc.

Voici les règles de validation des deux parcours.

Parcours "Mathématiques Recherche"

Les cours (36 ECTS)

Les étudiants doivent valider 4x9=36 ECTS de cours, dont au plus 18 ECTS en cours introductifs et au moins 9 ECTS en cours fonda 2 ou spécialisé. Il est possible de valider des crédits de cours d'autres universités (Paris 7, Orsay...) après accord des responsables du M2, qui vérifieront notamment la cohérence du choix.

Le stage (21 ECTS)

Il consiste en un travail personnel de compréhension, d'explication et de synthèse d'un ou plusieurs articles de recherche, conclu par la rédaction d'un mémoire et une soutenance devant un jury. Le sujet du mémoire est bien souvent, mais pas nécessairement, un tremplin vers le futur sujet de thèse.

Il est conseillé de prospecter pour un directeur de stage potentiel dès que l'on est sûr de son sujet de prédilection. Fin mars semble être une limite raisonnable.

La date de soutenance du mémoire sera fixée en accord avec le directeur de recherche et les membres du jury. *Attention :* les étudiants qui désirent candidater à un **Contrat Doctoral** auprès de l'Ecole Doctorale devront avoir soutenu leur mémoire *avant fin juin*. Pour les autres, la limite ordinaire est *fin septembre*.

Les 3 ECTS d'ouverture

Ils consistent en l'apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Parcours “Mathématiques Avancées”

Les cours (36 ECTS)

Les étudiants doivent valider 36 ECTS sous la forme de cours. Outre les cours du M2, il est possible de valider certains cours du second semestre de M1, dont le niveau est intermédiaire entre M1 et M2. Il faudra pour cela demander l'accord d'un responsable qui s'assurera que

- le cours concerné n'a pas déjà été validé en M1.
- son contenu n'est pas inclus dans celui d'un cours de M2 déjà validé.

Par ailleurs, le nombre d'ECTS ainsi acquises est limité à 12.

Voici la liste des cours de M1 éligibles, dont on trouvera aussi une description sur la brochure générale du Master.

- Groupes et algèbres de Lie (6 ECTS)
- Introduction aux surfaces de Riemann (6 ECTS)
- Groupe fondamental et revêtements (6 ECTS)
- Théorie analytique des équations différentielles ordinaires (6 ECTS)
- Équations aux dérivées partielles (12 ECTS)
- Histoire des mathématiques (6 ECTS)

Le stage (21 ECTS)

Il est similaire à celui du parcours Recherche. Le sujet du mémoire pourra cependant être plus adapté au projet de l'étudiant, notamment si celui-ci se destine à l'agrégation.

Les 3 ECTS d'ouverture

Ils consistent en l'apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Télé-enseignement

Une possibilité d'enseignement par correspondance est ouverte sur certains cours. Les étudiants par correspondance reçoivent ou téléchargent les polycopiés des cours, passent les examens à l'Université, et correspondent directement avec les enseignants (resp. leur directeur de stage) pour les questions pédagogiques (resp. la préparation de leur mémoire). Certains polycopiés sont disponibles sur les pages web des enseignants.

On consultera le site web du M2 pour des informations à jour concernant les cours disponibles par correspondance.

3 Inscription et candidature

L'inscription au master de Mathématiques fondamentales est réservée aux étudiants titulaires du M1, d'une maîtrise de mathématiques pures, ou d'un diplôme équivalent par décision individuelle d'équivalence du Président de l'Université.

En revanche, l'acceptation n'est pas automatique. Une sélection sera effectuée au vu des résultats obtenus dans les années antérieures. Voici les démarches pour candidater.

Inscription administrative par internet

Obligatoirement remplir un dossier d'inscription administrative via internet sur le site de la scolarité de l'université `http://www.upmc.fr/fr/formations/inscriptions_scolarite.html`. Si ce site est fermé, s'adresser au secrétariat.

Il sera demandé certains renseignements administratifs, après quoi il faudra imprimer le dossier ; de la persévérence peut s'avérer nécessaire ! Un numéro de dossier ainsi qu'un mot de passe vous seront alors attribués, qui permettront de suivre sur ce site l'évolution du statut de votre candidature.

Candidature

Ensuite, constituer un dossier de candidature et le remettre au secrétariat. *Demander au secrétariat la date limite de remise du dossier de candidature (courant septembre).*

Ce dossier doit comporter :

- le dossier d'inscription administrative imprimé
- le formulaire de candidature avec photo d'identité (téléchargeable sur le site internet)
- le relevé de notes de M1, délivré par son université d'origine.

Les étudiants ayant des diplômes étrangers doivent fournir en plus :

- la photocopie du programme des cours suivis pendant les quatre années d'études supérieures
- le relevé de notes des quatre années
- la photocopie des diplômes (le Service de la Scolarité en exigera ultérieurement une traduction assermentée ; voir par exemple le site des experts traducteurs `http://www.ceticap.com/`).

Résultats

Dans le cas d'une réponse favorable, l'étudiant recevra une lettre d'acceptation signée par le responsable du parcours. Dans tous les cas, l'avis de la commission sera consultable sur internet.

Bourses

Les étudiants désirant une bourse durant leur année de M2, doivent s'adresser au Bureau des bourses de l'université (campus de Jussieu). Il existe entre autres

- des bourses sur critère universitaire,
- des bourses sur critère social,
- des allocations d'études.

Voir les détails ainsi que les conditions d'attribution (de nationalité, de situation familiale, etc.) sur le site du bureau des bourses `http://www.upmc.fr/fr/vie_des_campus/bourses.html`.

Pour les deux premiers types de bourses ci-dessus il faut déposer une demande entre le 15 janvier et le 30 avril.

Par ailleurs, la Fondation Sciences Mathématiques de Paris offre des bourses d'études Ã travers son programme "Paris Graduate School of Mathematical Sciences". Consulter `http://www.sciencesmath-paris.fr/pgsm/`.

4 Cours de l'année 2013-2014

Chaque cours a un volume de 24h, sur 6 semaines. Les cours fondamentaux sont doublés par 12h de TD, qui sont assurés par l'auteur du cours (sauf mention du contraire, entre parenthèses).

Les cours ont généralement lieu sur le campus Jussieu. Certains auront lieu sur le site Chevaleret ou PRG (Paris 7).

Cours introductifs (9 septembre – 18 octobre 2013)

J.-Y. CHEMIN	Analyse	HFE
J.-F. DAT	Introduction à la théorie algébrique des nombres*	TN
J.-F. DAT	Algèbres de Lie* semi-simples et représentations	Lie
A. DUCROS	Les outils de la géométrie algébrique	GA
J. MARCHÉ	Introduction aux surfaces de Riemann	GC, GT
A. OANCEA	Géométrie différentielle	GT

Cours fondamentaux I (5 novembre – 16 décembre 2013)

N. BERGERON et G. GINOT	Topologies différentielle et algébriques des variétés	GA, GC
A. DUCROS (M. FLORENCE)	Introduction à la théorie des schémas	GA
F. LE ROUX	Systèmes dynamiques I *	Dyn
F. KLOPP	Une introduction à l'analyse semi-classique	HFE
F. LOESER	Groupes algébriques et groupes réductifs	Lie
L. MEREL (P7, P. CHAROLLOIS)	Théorie algébrique des nombres	TN
A. OANCEA	Géométrie riemanniennee	GT

Cours fondamentaux II (13 janvier – 21 février 2014)

L. CHARLES et S. DIVERIO	Géométrie complexe et théorie de Hodge	GA,GC,GT
G. FREIXAS MONTPLET	Introduction à la théorie de Hodge p-adique	GA, TN
B. KLINGLER (P7)	Cohomologie étale des schémas	GA
P. LE CALVEZ	Systèmes dynamiques II *	Dyn
N. LERNER	Inégalités de Carleman	HFE
X. MA (P7)	Variétés Hamiltoniennes et quantification géométrique	GT
A. MÉZARD	Déformations de représentations Galoisiennes p-adiques	TN
J. MICHEL (P7)	Groupes algébriques et groupes réductifs II	Lie

Cours spécialisés (3 mars – 11 avril 2014)

S. BOUCKSOM et S. DIVERIO	Géométrie birationnelle et programme des modèles minimaux	GA, GC
G. COURTOIS	Structure des groupes fondamentaux des variétés riemanniennes	GT
O. DUDAS (P7)	Introduction aux variétés de Deligne-Lusztig	Lie
L. FARGUES	Théorie de Hodge p-adique : le point de vue de la courbe	GA, TN
N. GIGLI	Analyse sur les espaces métriques mesurés	HFE
B. KLINGLER (P7)	Conjectures de Weil	GA, TN
X. MA (P7)	Variétés Hamiltoniennes et quantification géométrique	GT

* Cours pouvant être suivi en télé-enseignement.

GA	Géométrie algébrique	TN	Théorie des nombres	Lie	Groupes et algèbres de Lie
GC	Géométrie complexe	GT	Géométrie et topologie	Dyn	Dynamique
Phy	Physique Mathématique				
HFE	Analyse harmonique, analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles				

Cours introductif

Quelques outils de base en analyse

Jean-Yves Chemin

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est de fournir un certain nombre d'outils de base de l'analyse, outils qui sont nécessaires pour l'étude mathématique de nombreux problèmes et notamment ceux abordés dans les cours de D. Cordero, F. Klopp et C. Guillarmou.

Contenu

- Analyse de Fourier
- Espaces de Sobolev, inclusions de Sobolev
- Inégalités de Hardy Littlewood-sobolev
- Éléments de théorie spectrale
- Éléments de calcul pseudo-différentiel

Prérequis

Un cours de première année de Master d'analyse.

Bibliographie

– H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin. Fourier Analysis and Non Linear Partial Differential Equations. *Springer Verlag, 343, 2011*

– M. Reed, B. Simon. Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis.. *Academic Press, 1980*

Contact : `chemin@ann.jussieu.fr`

Cours introductif

Introduction à la théorie algébrique des nombres

Jean-François Dat

Notes de cours : `http://people.math.jussieu.fr/ dat/enseignement/enseignement.php`.

Présentation

Les objets principaux de ce cours sont les corps de nombres, *i.e.* les extensions finies de $\mathbb{Q}$, et leurs anneaux d'entiers.Contrairement à $\mathbb{Z}$,ces derniers ne sont généralement pas principaux, et n'ont pas la propriété d'unique factorisation. Cependant, on verra que leurs idéaux inversibles possèdent, eux, une propriété d'unique factorisation, et que l'analogue correct d'un "nombre premier" est la notion d'"idéal premier".

Du point de vue algébrique, les idéaux premiers sont les générateurs naturels du groupe des idéaux inversibles de l'anneau d'entiers. Nous verrons comment décomposer l'idéal engendré par un nombre premier en produit d'idéaux premiers, introduirons les notions de ramification et de déploiement, et l'effet de l'action du groupe de Galois, lorsque le corps de nombres est Galoisien. Les idéaux premiers engendrent aussi le "groupe de classes", un invariant très important qui mesure le défaut de principalité. Nous montrerons la finitude de ce groupe de classes.

D'un point de vue plus analytique, les idéaux premiers correspondent aux valeurs absolues "non-archimédiennes" du corps. Nous étudierons les complétions des corps de nombres pour de telles valeurs absolues, qui sont des extensions finies d'un corps $\mathbb{Q}_p$ de nombres p-adiques. On expliquera les implications algébriques et analytiques du lemme de Hensel.

Si le temps le permet, on introduira l'anneau des adèles et on discutera ses propriétés.

Contenu

- Exemples : corps quadratiques, corps cyclotomiques.
- Anneaux de Dedekind (factorisation des idéaux, exemples)
- Finitude du nombre de classes et théorème des unités de Dirichlet.
- Groupes de décomposition, d'inertie, de ramification.
- Complétions algébrique et analytique, corps p-adiques.

Prérequis

Une certaine familiarité avec les notions fondamentales d'algèbre commutative (localisation, anneaux noetheriens, artiniens, semi-locaux) sera bienvenue.

Bibliographie

- L. Merel. Nombres algébriques et nombres p-adiques. `http://www.institut.math.jussieu.fr/~merel/TAN.pdf`
- J. Milne. Algebraic Number Theory. `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/math676.pdf`
- J. Neukirch. Algebraic Number Theory. *Springer, 2009*
- J.P. Serre. Corps locaux. *Hermann, 1968*

Contact : `dat@math.jussieu.fr`

Cours introductif

Algèbres de Lie semi-simples et leurs représentations

Jean-François Dat

Notes de cours : `http://www.math.jussieu.fr/ dat/enseignement/enseignement.php`.

Présentation

Le but est d'introduire quelques outils combinatoires fondamentaux en théorie de Lie comme les notions de systèmes de racines et de plus haut poids qui interviennent dans la classification et la théorie des représentations de nombreux objets (groupes de Lie, groupes algébriques, variantes "quantiques").On se placera dans le contexte le plus simple où ils apparaissent, celui des algèbres de Lie et de leurs représentations.

Contenu

– Algèbres de Lie : définition, notion de représentation, exemples classiques, lien avec les groupes de Lie

– Algèbres de Lie nilpotentes, résolubles, ou semi-simples.

– Complète réductibilité pour les algèbres de Lie semi-simples (thÃ©orÃ¨me de Weyl)

– Structure des algèbres de Lie semi-simples. Systèmes de racines.

– Modules de plus haut poids, modules de Verma, modules simples.

Prérequis

Rien de plus que de l'algèbre linéaire et bilinéaire !

Bibliographie

– N. Bourbaki. Groupes et Algèbres de Lie. *Hermann 1968*

– J. Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory. *Springer 1978*

– J.-P. Serre. Algèbres de Lie semi-simples complexes. *Benjamin 1966*

– A.A. Kirillov. An introduction to Lie groups and Lie algebras. *Cambridge Studies in advanced mathematics 2008* `http://www.math.sunysb.edu/~kirillov/mat552/liegroups.pdf`

Contact : `dat@math.jussieu.fr`

Cours introductif

Les outils de la géométrie algébrique

Antoine Ducros

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est d'introduire un certains nombres d'outils et notions, dans différents domaines (catégories, algèbre commutative, théorie des faisceaux), qui sont constamment utilisés en géométrie algébrique à la Grothendieck. Conçu dans l'optique de préparer au cours d'introduction à la théorie des schémas, il peut présenter un intérêt pour tout étudiant intéressé par l'algèbre et la géométrie au sens large.

Contenu

– Le langage des catégories : catégories, foncteurs, équivalence de catégories, foncteurs représentables, produits fibrés, foncteurs adjoints.

– Algèbre commutative : idéaux premiers et maximaux, localisation, éléments entiers, going-up et going-down, normalisation de Noether, Nullstellensatz, dimension de Krull, produit tensoriel.

– Théorie des faisceaux : préfaisceaux, faisceaux, images directes et inverses de faisceaux, espaces anneés, espaces localement annelés, faisceaux de modules.

Prérequis

Il n'y a pas techniquement énormément de prérequis, sinon les définitions de base de l'algèbre commutative (anneaux, idéaux, modules...) ; mais une solide aisance en la matière est préférable. Je ne suivrai pas de livre spécifique ; je donne à titre purement indicatif deux références, le Matsumura pour l'algèbre commutative, et le chapitre II, paragraphe 1 du Hartshorne pour les faisceaux.

Bibliographie

– R. Harsthorne. Algebraic Geometry. *Graduate texts in math. 52, Springer-Verlag*

– H. Matsumura. Commutative ring theory. *Cambridge Studies in advanced math. 8, Cambridge University Press*

Contact : `ducros@math.jussieu.fr`

Cours introductif

Introduction aux surfaces de Riemann

Julien Marché

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

L'objectif de ce cours est de proposer une introduction aux divers aspects algébriques, analytiques et géométriques d'un des objets les plus riches et les plus importants des mathématiques, qui est la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine.

Contenu

– Définition et exemples, courbes elliptiques, courbes algébriques, courbes associées aux fonctions holomorphes.

– Aspects topologiques, genre, triangulation, formule de Riemann-Hurwitz.

– Différentielles holomorphes, théorème de Riemann-Roch.

– Théorème d'Abel-Jacobi, relations bilinéaires de Riemann.

Prérequis

Analyse complexe de M1 et bases de topologie et de géométrie différentielle.

Bibliographie

– Reyssat. Quelques aspects des surfaces de Riemann..

– Bost. Introduction to compact Riemann surfaces. *Jacobian and Abelian varieties, dans From number theory to physics, Springer.*

– Henri-Paul de Saint-Gervais.. Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire.. `http://www.lcdpu.fr/livre/?GCOI=27000100107890&fa=complements`

– Miranda. Algebraic Curves and Riemann Surfaces. *Graduate Studies in Mathematics*

Contact : `marche@math.jussieu.fr`

Cours introductif

Géométrie et topologie différentielle

Alexandru Oancea

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours est une introduction à la géométrie différentielle et à la topologie différentielle.

Contenu

– Variétés, champs de vecteurs, formes différentielles, fibrés vectoriels

– Topologie différentielle : cohomologie de de Rham ; théorie de Morse ; théorème de Sard ; transversalité et intersection

– Connexions et courbure. Classes caractéristiques : point de vue de Chern-Weil

– Classes caractéristiques via théorie de l'obstruction

Prérequis

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle de niveau M1

Bibliographie

– Warner. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. *2nd ed., Springer, 1983*

– Paulin. Géométrie différentielle élémentaire. *Cours ENS 2006-2007* `http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf`

– Milnor. Topology from the differentiable viewpoint. *2nd ed., Princeton Univ. Press, 1997*

– Milnor. Morse theory. *Princeton Univ. Press, 1963*

– Wells. Differential Analysis on Complex Manifolds. *2nd ed., GTM, Springer, 2007*

– Steenrod. The topology of fiber bundles. *Princeton Univ. Press, 1951*

Contact : `oancea@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Topologies différentielle et algébrique des variétés

Nicolas Bergeron et Gregory Ginot (Travaux dirigés par Antonin Guilloux)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

La topologie algébrique fait un pont entre la géométrie et l'algèbre. Dans ce cours nous nous concentrerons sur l'étude des variétés différentielles.

Le but est de classer, à difféomorphisme près, les variétés différentielles en leur associant des invariants de nature algébrique (nombres entiers, groupes, anneaux, ...).

Les idées et images issues de la topologie algébrique irriguent l'ensemble des mathématiques modernes. Le but de ce cours est de les exposer dans leur cadre originel en suivant le plan général proposé, il y a près de 130 ans, par Poincaré dans ses mémoires fondateurs sur l'"Analysis Situs". La présentation, le style, les démonstrations et les méthodes employées seront par contre celles du 21ème siècle.

Contenu

– Variétés, homotopie des applications et homotopie entre espaces, rétraction (par déformation), contractibilité, revêtements.

– Notion abstraite de théorie homologique des variétés. Calculs et applications d'une telle théorie.

– Construction d'une théorie homologique. Complexes simpliciaux et polyèdres. Triangulation des variétés. Homologie simpliciale. Formule d'Euler-Poincaré. Homologie Singulière.

– Intersection, dualité de Poincaré et cohomologie.

– Théorème de de Rham PL, cup-produit.

– Groupe fondamental, lien avec l'homologie.

Prérequis

Connaissances de topologie générale et géométrie différentielle de maîtrise. Cela pourra aider d'avoir suivi les cours introductifs de géométrie différentielle et/ou surfaces de Riemann. Il y a par ailleurs un cours introductif à Paris 7 sur le même sujet mais avec un point de vue différent.

Bibliographie

– Allen Hatcher. Algebraic Topology.

– Glen Bredon. Topology and Geometry.

– Claude Godbillon. Eléments de topologie Algébrique.

– William Fulton. Algebraic Topology: a first course .

– William Massey. A basic course in algebraic topology.

– Frédéric Paulin. Topologie algébrique élémentaire. `http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/liste_notescours.html`

Contact : `bergeron@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Introduction à la théorie des schémas

Antoine Ducros

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le langage des schémas a été introduit par Grothendieck (et son école) dans les années 50-60 avec en ligne de mire les conjectures de Weil ; il permet de manipuler des variétés algébriques sur un corps ou même un anneau quelconques, et est toujours le cadre de travail de la géométrie algébrique contemporaine. On peut par exemple, grâce à lui, étant donné un système d'équations S à coefficients dans Z, voir les variétés définies par S sur les différents corps $\mathbb{F}_p$ (par réduction modulo p des équations) ainsi que sur Q (en oubliant que les coefficients sont entiers) comme les fibres d'un certain morphisme, et donc penser à cette collection de variétés (dont le corps de définition varie) comme à une famille, au sens géométrique du terme.

Contenu

- Spectre d'un anneau commutatif.
- Définition d'un schéma ; schémas irréductibles, composantes irréductibles, dimension... Morphismes de schémas.
- Foncteur des points d'un schéma.
- Faisceaux quasi-cohérents, immersions fermées.
- Schémas projectifs, morphismes projectifs.
- Si le temps le permet : faisceau des différentielles, lissité.

Prérequis

Je me fonderai sur le cours introductif *Les outils de la géométrie algébrique*. Je m'inspirerai assez librement du chapitre II du Hartshorne ; je conseille également la lecture de l'introduction de EGA.

Bibliographie

- R. Harsthorne. Algebraic Geometry. *Graduate texts in math. 52, Springer-Verlag*
- A. Grothendieck et J. Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 166, Springer-Verlag*

Contact : `ducros@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Une introduction à l'analyse semi-classique

Frédéric Klopp

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours se veut une introduction à l'analyse semi-classique des équations aux dérivées partielles. On se concentrera sur le cas de l'équation de Schrödinger.

L'analyse semi-classique peut être définie comme l'analyse d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un petit paramètre. Son origine se trouve dans l'analyse de l'équation de Schrödinger issue de la mécanique quantique

$$ih\frac{\partial}{\partial t}u = -h^2\Delta u + Vu, \quad u_{|t=0} = u_0$$

ou de l'équation aux valeurs propres associée

$$-h^2\Delta u + Vu, \quad u_{|t=0} = Eu.$$

On cherche à décrire le comportement des solutions de ces équations dans la limite $h \to 0^+$. En particulier, on cherche à mettre en évidence les relations entre le comportement des solutions de ces équations et celui du système dynamique classique associé défini par le hamiltonien $H(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$.

Contenu

- Géométrie symplectique locale.
- Construction de solutions approchées : la méthode WKB.
- Opérateurs auto-adjoints.
- La transformée de Fourier et la méthode de la phase stationnaire.
- Opérateurs h-pseudo-différentiels et quantification.
- Valeurs propres et vecteurs propres dans la limite semi-classique.

Prérequis

Une bonne connaissance de l'analyse réelle, de théorie des distributions et de l'analyse fonctionnelle de master 1 est requise.

Bibliographie

– Maciej Zworski. Semi-classical analysis. . *Graduate Studies in Mathematics, Volume 138. AMS 2012* URL

– M. Dimassi et J. Sjöstrand. Spectral asymptotics in the semi-classical limit.. *London Mathematical Society Lecture Note Series, no 268. Cambridge University Press, 1999.*

– Bernard Helffer. Semi-classical analysis for the Schroedinger operator and applications. *Lecture Notes in Mathematics, no 1336. Springer-Verlag, Berlin, 1988.*

– André Martinez. An introduction to semiclassical and microlocal analysis. *Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.*

Contact : klopp@math.jussieu.fr

Cours fondamental 1

Systèmes dynamiques I

Frederic Le Roux (Travaux dirigés par F. Metzger)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Introduire les notions de base et les exemples classiques des systèmes dynamiques.

Contenu

- Dynamique topologique
- Théorie ergodique, existence de mesures invariantes, théorie spectrale
- Nombre de rotation des homéomorphismes du cercle
- Introduction aux actions de groupes sur le cercle
- Introduction à l'entropie

Prérequis

Topologie, analyse réelle, théorie de la mesure.

Bibliographie

– A. Katok, B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Cambridge University Press*

– P. Walters. An introduction to ergodic theory. *graduate texts in mathematics, Springer-Verlag*

– P. Le Calvez. Notes de cours 2011-2012. `http://www.master.math.upmc.fr/mathfond/2011-12/courslecalvez2011.pdf`

Contact : `lerouxf@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Groupes algébriques linéaires et groupes réductifs

François Loeser

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est d'introduire le matériel de base dans l'étude des groupes algébriques linéaires et d'obtenir la classification des groupes réductifs connexes sur un corps algébriquement clos

Contenu

- Groupes algébriques linéaires
- Groupes algébriques commutatifs
- Sous-groupes paraboliques
- Sous-groupes de Borel
- Groupes réductifs
- Classification des groupes réductifs connexes sur un corps algébriquement clos

Prérequis

Cours de base de géométrie algébrique

Bibliographie

- T. A. Springer. Linear Algebraic Groups. *Birkhauser* URL

Contact : loeser@math.jussieu.fr

Cours fondamental 1

Théorie des nombres

Loïc Merel

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours fait suite au cours d'introduction de J-F. Dat. Nous étudierons les fonctions ζ de Dedekind. Nous aborderons la formule du nombre de classes. Puis nous donnerons une démonstration élémentaire du théorème de Chebotarev, via le théorème de la progression arithmétique. Ensuite nous aborderons quelques notions plus avancées en théorie algébrique des nombres en vue des cours du second semestre. Nous étudierons les corps quadratiques et cyclothymiques et d'autres exemples.

Contenu

- Fonctions ζ de Dedekind, fonctions L de Dirichlet
- Formule du nombre de classes
- Théorème de Chebotarev
- Corps cyclotomique
- Théorie du corps de classe

Prérequis

Prérequis: le cours de théorie algébrique des nombres de J-F. Dat. À défaut: le livre de P. Samuel, théorie algébrique des nombres.

Bibliographie

- P. Samuel. Théorie algébrique des nombres.
- R. Schoof. Catalan's conjecture.
- L. Washington. Introduction to cyclotomic fields.
- J-P. Serre. Cours d'arithmétique.
- J-P. Serre. Corps locaux.
- Cassels-Frölich (ed). Algebraic Number Theory.

Contact : `merel@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Géométrie riemannienne

Alexandru Oancea

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours est une introduction à la géométrie riemannienne.

Contenu

- Métrique riemannienne, énergie, géodésiques, exponentielle, complétude
- Variation seconde, champs de Jacobi, courbure riemannienne
- Courbure sectionnelle, classification des espaces à courbure sectionnelle constante
- Courbure et topologie
- Théorèmes de comparaison. Inégalités isopérimétriques.
- Éléments de géométrie hyperbolique.

Prérequis

Un cours de géométrie différentielle.

Bibliographie

- Gallot, Hulin, Lafontaine. Riemannian Geometry. *3rd ed., Springer, 2004*
- Milnor. Morse theory. *Princeton Univ. Press, 1963*
- Hicks. Notes on differential geometry. *Van Nostrand, 1965*

Contact : `oancea@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 2

Géométrie complexe et théorie de Hodge

Laurent Charles et Simone Diverio

Notes de cours : `http://www.math.jussieu.fr/ diverio/`.

Présentation

Le but de ce cours est de donner une introduction à la géométrie complexe, c'est-à-dire l'étude des variétés localement isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Comme une variété complexe est aussi un espace topologique, il est intéressant d'étudier les liens entre la structure complexe et la topologie. La théorie de Hodge est un outil puissant qui fournit ces liens entre géométrie et topologie. On verra que les résultats sont particulièrement pertinents dans le cas des variétés kähleriennes compactes qui sont une classe assez large et très importante de variétés complexes.

Contenu

- Variétés complexes, cohomologie de Dolbeault
- Fibrés holomorphes, métriques hermitiennes, connexion de Chern
- Opérateur de Hodge, laplacien de Hodge-de Rham
- Variétés kählériennes, décomposition de Hodge
- Théorèmes d'annulation, plongement de Kodaira

Prérequis

Surfaces de Riemann, géométrie différentielle (en particulier cohomologie de de Rham), notions de base des fonctions holomorphes en plusieurs variables (des notes seront disponibles avant le début du cours)

Bibliographie

- J.-P. Demailly. Complex analytic and algebraic geometry. *references* `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf`
- C. Voisin. Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe. *SMF*
- R.O. Wells. Differential analysis on complex manifolds. *Graduate Texts in Mathematics 65*

Contact : `diverio@math.jussieu.fr`

Cours spécialisé

Une introduction à la théorie de Hodge p-adique

Gerard Freixas Montplet

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de présenter les premiers résultats qui conduirent au développement de la théorie de Hodge p-adique tel que nous la connaissons aujourd'hui. En particulier, le cours abordera les résultats de Tate sur la décomposition de Hodge-Tate pour les groupes p-divisibles, ainsi que des versions géométriques s'appliquant aux schémas abéliens sur des corps p-adiques. Ces résultats fourniront une motivation pour introduire l'anneau des périodes de Fontaine B_{dR}, qui servira ensuite à établir le théorème de comparaison étale - de Rham pour les schémas abéliens. Finalement, si le temps le permet, on énnoncera les théorèmes de comparaison de Faltings.

Contenu

- Théorie de la ramification
- Groupes p-divisibles et leur décomposition de Hodge-Tate.
- Rappels sur les schémas abéliens et leur cohomologie.
- Décomposition de Hodge-Tate pour les schémas abéliens, d'après Fontaine et Coleman.
- Quelques éléments sur les anneaux de périodes p-adiques.
- Extensions vectorielles et théorèmes de comparaison étale - de Rham.

Prérequis

Théorie algébrique des nombres. Géométrie algébrique.

Bibliographie

- John Tate. p-divisible groupes. *Proc. Conf. Local fields, 1967*
- Jean-Marc Fontaine. Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux. *Invent. Math. 65 (1981/1982)*
- Coleman, Robert. Hodge-Tate periods and p-adic abelian integrals. *Invent. Math. 78 (1984)*
- Barry Mazur and William Messing. Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology. *LNM 370, Springer-Verlag, 1974.*
- Jean-Marc Fontaine. Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques. *Astérisque 295 (2004)*

Contact : `freixas@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 2

Cohomologie étale et conjectures de Weil

Bruno Klingler

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est d'expliquer la preuve des conjectures de Weil par Deligne. Ces conjectures relient la topologie de l'espace des points complexes d'une variété projective lisse définie par des équations homogènes à coefficients entiers au nombre de points sur les corps finis de cette variété. L'outil principal est la cohomologie étale, développée par Grothendieck dans le but d'étudier ces conjectures.

Contenu

– Partie I: cohomologie étale

– Topologie étale, faisceaux sur le site étale, image directe supérieure, pureté, changement de base propre et lisse

– Partie II: conjectures de Weil

– fonctions zeta, formule des traces de Lefschetz, pinceaux de Lefschetz, cycles evanescents, la preuve.

Prérequis

Cours de base de théorie des schémas, de théorie des nombres.

Bibliographie

– Deligne. Weil I, II. *Publ.IHES 43 (273-307), 52 (137-252)* URL

– Grothendieck. SGA 4.

– Deligne . SGA 4 1/2.

– Milne. Etale cohomology. *http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/LEC.pdf*

– Deligne, Katz. SGA 7 II.

Contact : klingler@math.jussieu.fr

Cours fondamental 2

Systèmes dynamiques II

Patrice Le Calvez

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Ce cours est une suite naturelle de cours Systèmes Dynamiques I. Après avoir introduit les différentes notions d'entropie, nous nous intéresserons aux systèmes uniformément hyperboliques et terminerons par des versions plus faibles d'hyperbolicité en introduisant la notion d' exposant de Lyapounov.

Contenu

- Entropie topologique, entropie métrique, principe variationel, lien avec l'action en homologie
- Sous-décalages de type fini, partition de Markov
- Théorème de Hartman-Grobman, théorème de la variété stable
- Automorphismes hyperboliques du tore
- Cocycles, exposants de Lyapounov

Prérequis

Il est préférable d'avoir suivi le cours Systèmes Dynamiques I, de Frédéric Le Roux car le cours en est une suite naturelle

Bibliographie

- A. Katok, B. Hasselblatt. Introduction to he modern theory of dynamical systems. *Cambridge University Press*
- P. Walters. An introduction to ergodic theory. *Graduate text in Mathematics*

Contact : `lecalvez@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 2

Inégalités de Carleman

Nicolas Lerner

Notes de cours : `http://www.math.jussieu.fr/ lerner/index.m2carl.html`.

Présentation

Le but de ce cours est de donner une introduction aux inégalités de Carleman. Ces inégalités L^p à poids sont utilisées dans différents contextes de l'étude des EDP, pour des problèmes d'unicité et de contrôle.

Contenu

– La méthode de Carleman, exemples et introduction.

– Théorèmes d'unicité de Calderón et de Hörmander.

– Inégalités de Carleman pour des opérateurs avec des coefficients présentant des sauts sur des hypersurfaces.

– Pseudo-convexité conditionnelle et applications.

Prérequis

Analyse de Fourier, quelques notions sur les EDP.

http://www.math.jussieu.fr/ lerner/realanalysis.lerner.pdf

http://www.math.jussieu.fr/ lerner/pde-m1-lerner.pdf

Bibliographie

– L. Hörmander. ALPDO, chapitre 28. *Springer Grundlehren 275*

– J. Le Rousseau, N. Lerner. Carleman estimates for anisotropic elliptic operators with jumps at an interface. *Analysis & PDE, 2013* `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00546869`

– A. Ionescu, S. Klainerman. Uniqueness results for ill-posed characteristic problems in curved space-times. *Comm. Math. Phys. 285 (2009), no. 3*

Contact : `lerner@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 2

Déformations de représentations galoisiennes p-adiques

Ariane Mezard

Notes de cours : `http://www.math.jussieu.fr/ mezard/`.

Présentation

La théorie des déformations est une version algébrique du calcul différentiel. Elle permet de paramétrer des familles d'objets ayant des propriétés communes par un anneau, dit anneau universel de déformations. Dans ce cours, nous considérerons le cas des déformations de représentations galoisiennes p-adiques. La détermination de cet anneau dans ce cadre est au coeur de nombreuses conjectures arithmétiques actuelles.

Contenu

- Anneau des vecteurs de Witt
- Cohomologie galoisienne
- Foncteur de déformations
- Représentations galoisiennes modulo p
- Représentations galoisiennes p-adiques
- Anneaux de déformations universel

Prérequis

Cours introductif de J.-F. Dat et de A. Ducros

Cours fondamental I de L. Merel et de A. Ducros

Bibliographie

- B. Mazur. Deforming Galois representations.. *Galois groups over Q, Springer 1989.*
- J.-P. Serre. Corps Locaux. *Hermann*
- J.-P. Serre. Cohomologie galoisienne. *Lecture Notes in Mathematics*

Contact : `ariane.mezard@upmc.fr`

Cours fondamental 1

Groupes réductifs 2

Jean Michel

Notes de cours : `peut-être`.

Présentation

Cours sur les groupes algébriques.

Ce cours prendra la suite du cours de F. Loeser qui en sera le pré-requis, et sera un pré-requis d'un cours de O. Dudas sur la théorie de Deligne-Lusztig qui suivra.

Seront traités en particulier:

-sur la structure des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos: BN-paire associée à un groupe réductif, sous-groupes de Levi, parties closes et quasi-closes des racines, intersection de sous-groupes paraboliques, présentation de Chevalley-Steinberg. théorème disant qu'une isogénie correspond à un p-morphisme de données radicielles.

-des questions de rationalité, essentiellement l'existence d'une BN-paire rationelle. Dans le cas d'un automorphisme de Frobenius, le théorème de Lang-Steinberg et ses conséquences.

-Une introduction à la théorie des représentations complexes d'un groupe réductif fini, essentiellement la théorie de Harish-Chandra et la dualité de Curtis-Alvis.

Contenu

– groupes algébriques

Prérequis

Cours de F. Loeser

Bibliographie

– T.A. Springer. Linear algebraic groups, 2nd edition. *progress in mathematics Volume 9, Birkhauser 1998.*

– F. Digne et J. Michel. Representations of finite groups of Lie type. *London Mathematical Society Student Texts volume 21, Cambridge University Press 1991.*

Contact : `jmichel@math.jussieu.fr`

Cours spécialisé

Géométrie birationnelle en dimension supérieure: le programme des modèles minimaux

Sébastien Boucksom et Simone Diverio

Présentation

Présentation: Le programme des modèles minimaux (MMP en anglais) est une approche de la classification des variétés algébriques qui a vu le jour au début des années 80 sous l'impulsion de Kawamata, Kollar, Mori, Reid, Shokurov parmi bien d'autres. L'objectif initial du MMP était de généraliser en toutes dimensions la classification birationnelle des surfaces obtenue pas les géomètres italiens au début du XXe siècle. Mais en découvrant son cadre naturel (relatif, pour des "paires") le MMP a donné lieu à une multitude d'outils extrêmement puissants et dont le cadre d'application a largement dépassé l'objectif initial de classifier les variétés en fonction de la positivité de leur fibré canonique.

Parallèlement aux développements du MMP per se, la compréhension de la géométrie birationnelle des systèmes linéaires a elle aussi énormément progressé grâce entre autres aux travaux de Demailly, Ein, Lazarsfeld et Siu, et la convergence de ces deux points de vue a récemment permis à Hacon et McKernan d'accomplir des progrès décisifs en démontrant deux des conjectures centrales de la géométrie birationnelle.

Objectifs: Le but de ce cours est de proposer une introduction à ces résultats qui sont appelés à devenir absolument fondamentaux pour la géométrie algébrique. L'objectif principal n'est donc pas de donner une démonstration détaillée de tous les résultats connus du MMP (ce qui serait évidemment une gageure) mais plutôt d'expliquer la portée de ces résultats et d'apprendre à les utiliser.

Contenu

- Notions de positivité en géométrie algébrique
- Singularités terminales et canoniques, singularités des paires
- Contraction de sous-variétés, "base-point free theorem"
- Théorème du cône et théorème de rationnalité
- Théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg
- Géographie des modèles minimaux, flips

Prérequis

Cours d'introduction à la géométrie algébrique et la géométrie complexe (en particulier, savoir ce qu'est un éclatement!).

Bibliographie

- Robin Hartshorne. Algebraic geometry. *Graduate Texts in Mathematics, No. 52.*
- Janos Kollar, Shigefumi Mori. Birational geometry of algebraic varieties. *Cambridge Tracts in Mathematics, 134. Cambridge University Press, Cambridge, 1998*
- Robert K. Lazarsfeld. Positivity in algebraic geometry I, II. *A Series of Modern Surveys in Mathematics 48 and 49. Springer-Verlag, Berlin, 2004*

Contact : boucksom@math.jussieu.fr

Cours spécialisé

Structure des groupes fondamentaux des variétés riemanniennes.

Gilles Courtois

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de présenter un résultat récent de V.Kapovitch et B. Wilking qui établit un lemme de Margulis pour les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée. Le lemme de Margulis classique dit qu'il existe une constante $\mu(n)$ telle que pour toute variété riemannienne M de dimension n à courbure sectionnelle bornée, $-1 \leq K \leq 0$, le sous-groupe du groupe fondamental de M engendré par des lacets en un point de longueur inférieure à $\mu(n)$ est virtuellement nilpotent. Ce théorème découle d'une observation très simple sur les matrices dans le cas homogène et se généralise au cas de courbure sectionnelle bornée dans le même esprit. La généralisation au cas de courbure de Ricci minorée relève d'autres méthodes, introduites par J. Cheeger et T. Colding, conduisant à la description des limites de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée.

Contenu

- Lemme de Margulis, variétés presque plates.
- Topologie de Gromov Hausdorff, théorème de précompacité.
- Limites de variétés riemanniennes, théorème de presque scindement de Cheeger et Colding.
- Le "lemme de Margulis" à courbure de Ricci minorée de V. Kapovitch et B. Wilking.

Prérequis

Notions de géométrie riemannienne.

Bibliographie

– D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov. A Course in Metric Geometry. *Graduate Studies in Mathematics, Vol. 33, AMS* URL

– P. Buser, H. Karcher. Gromov's almost flat manifolds. *Astérisque vol. 81, SMF, 1981*

– V. Kapovitch, B. Wilking. Structure of fundamental groups of manifolds with Ricci curvature bounded below. *arXiv:1105.5955v2, math. DG, 02/11/2011.*

– J. Cheeger. Degeneration of Riemannian metrics under Ricci curvature bounds. *Lezioni Fermiane, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2001*

Contact : courtois@math.jussieu.fr

Cours spécialisé

Introduction à la théorie de Deligne–Lusztig

Olivier Dudas

Notes de cours : `http://www.math.jussieu.fr/ dudas/notes.html`.

Présentation

L'objet du cours est la construction et l'étude des représentations linéaires d'une certaine classe de groupes finis appelés "groupes réductifs finis" ou "groupes finis de type de Lie" (par exemple $\mathrm{GL}_n(q)$, $\mathrm{SL}_n(q)$, $\mathrm{SP}_{2n}(q)$, ..., $\mathrm{E}_8(q)$). Ce sont les équivalents finis des groupes algébriques réductifs et à ce titre on peut construire leurs représentations à partir des objets géométriques standard en théorie de Lie (espaces projectifs, grassmanniennes, variétés de drapeaux...).

C'est ce point de vue, dû à Deligne et Lusztig, que nous adopterons tout au long de ce cours.

Contenu

– Variétés de drapeaux et variétés de Schubert

– Variétés de Deligne–Lusztig (propriétés géométriques élémentaires et descriptions explicites pour quelques cas dans GL_n)

– Cohomologie ℓ-adique, formule des traces

– Caractères unipotents et lien avec les algèbres de Hecke par la formule du caractère

– Calculs explicites de cohomologie, notamment pour SL_2

– Conjectures pour les éléments réguliers, et lien avec la conjecture du défaut abélien

Prérequis

Il est conseillé d'avoir suivi les cours sur les groupes algébriques de François Loeser et Jean Michel.

Bibliographie

– C. Bonnafé. Representations of $\mathrm{SL}_2(q)$. *Algebra and Applications, 13. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.* URL

– R. W. Carter. Finite groups of Lie type. *Wiley Classics Library. John Wiley Sons Ltd., Chichester, 1993. Conjugacy classes and complex characters, Reprint of the 1985 original, A Wiley-Interscience Publication.*

– P. Deligne et G. Lusztig. Representations of reductive groups over finite fields. *Annals of Math. 103, 1976*

– F. Digne et J. Michel. Representations of finite groups of Lie type. *volume 21 of London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1991*

– G. Lusztig. Characters of reductive groups over a finite field. *volume 107 of Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984.*

Contact : `dudas@math.jussieu.fr`

Cours spécialisé

Théorie de Hodge p-adique: le point de vue de la courbe

Laurent Fargues

Présentation

Le but de ce cours est d'exposer un nouveau point de vue sur la théorie de Hodge p-adique qui consiste à définir une certaine "courbe" et étudier les fibrés vectoriels sur celle-ci. Cette courbe est un schéma sur $\mathbb{Q}_p$ qui est un recollement d'un nombre fini de spectres d'anneaux de Dedekind et est complète en un certain sens mais pas de type fini sur $\mathbb{Q}_p$. On exposera sa construction ainsi que le théorème de classification des fibrés sur celle-ci du point de vue de la théorie de Harder-Narasimhan. Comme application on donnera une preuve des deux théorèmes fondamentaux de la théorie de Hodge p-adique: faiblement admissible implique admissible et la conjecture de monodromie p-adique.

Contenu

- Fonctions rigides analytiques d'une variable d'après Lazard
- Anneaux de périodes p-adiques
- Suite exacte fondamentale en théorie de Hodge p-adique
- Construction de la courbe fondamentale
- Filtrations de Harder-Narasimhan et classification des fibrés
- Preuve des conjectures faiblement admissible implique admissible et de Rham implique potentiellement semi-stable

Prérequis

Théorie algébrique des nombres. Surfaces de Riemann. Géométrie algébrique. Une introduction à la théorie de Hodge p-adique.

Bibliographie

- Laurent Fargues et Jean-Marc Fontaine. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique. *Prépublication* `http://www.math.jussieu.fr/~fargues/Courbe.pdf`
- Laurent Fargues et Jean-Marc Fontaine. Vector bundles on curves and p-adic Hodge theory. *A paraître aux actes du symposium EPSRC "Automorphic forms and Galois representations"* `http://www.math.jussieu.fr/~fargues/Durham.pdf`
- Laurent Fargues et Jean-Marc Fontaine. Vector bundles and p-adic Galois representations. *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics Volume 51, 2011* `http://www.math.jussieu.fr/~fargues/beijingcurve_version_finale.pdf`
- Michel Lazard. Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. *Publications Mathématiques de l'IHES vol.14, 1962*
- Günter Harder et Mudumbai Seshachalu Narasimhan. On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves. *Mathematische Annalen 212, 1974/75*
- Benedict Gross et Michael Hopkins. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*

Contact : `fargues@math.jussieu.fr`

Cours spécialisé

Analyse sur les espaces métriques mesurés

Nicola Gigli

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

But du cours est de donner une vue d'ensemble sur les outils nécessaires pour faire l'analyse dans un cadre non-lisse, mettant l'accent sur la structure différentielle.

Si le temps le permet, des applications seront donnés en termes de propriétés de comparaison du laplacien de la fonction distance sur les espaces avec la courbure de Ricci minorée.

Contenu

- Définition d'espace de Sobolev sur un espace métrique mesuré
- Notion de base de transport optimal
- Différentielles et gradients

Prérequis

Théorie de la mesure

Bibliographie

– Ambrosio, Gigli. A user's guide to optimal transport. `http://cvgmt.sns.it/paper/195/`

– Ambrosio, Gigli, Savaré. Heat flow and calculus on metric measure spaces with Ricci curvature bounded below - the compact case. `http://arxiv.org/abs/1205.3288`

– Gigli. On the differential structure of metric measure spaces and applications. `http://arxiv.org/abs/1205.6622`

Contact : `@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 2

Cohomologie étale et conjectures de Weil

Bruno Klingler

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est d'expliquer la preuve des conjectures de Weil par Deligne. Ces conjectures relient la topologie de l'espace des points complexes d'une variété projective lisse définie par des équations homogènes à coefficients entiers au nombre de points sur les corps finis de cette variété. L'outil principal est la cohomologie étale, développée par Grothendieck dans le but d'étudier ces conjectures.

Contenu

– Partie I: cohomologie étale

– Topologie étale, faisceaux sur le site étale, image directe supérieure, pureté, changement de base propre et lisse

– Partie II: conjectures de Weil

– fonctions zeta, formule des traces de Lefschetz, pinceaux de Lefschetz, cycles evanescents, la preuve.

Prérequis

Cours de base de théorie des schémas, de théorie des nombres.

Bibliographie

– Deligne. Weil I, II. *Publ.IHES 43 (273-307), 52 (137-252)* URL

– Grothendieck. SGA 4.

– Deligne . SGA 4 1/2.

– Milne. Etale cohomology. *http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/LEC.pdf*

– Deligne, Katz. SGA 7 II.

Contact : klingler@math.jussieu.fr