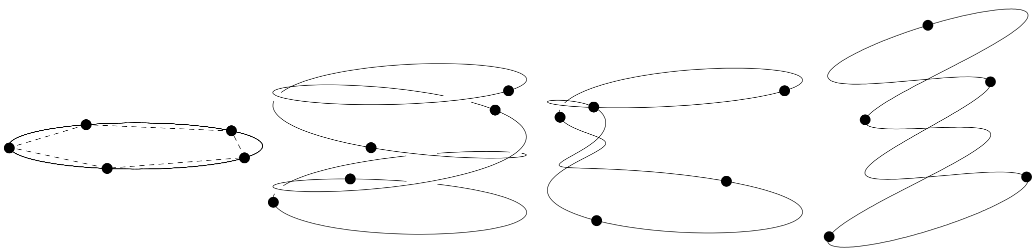
Université Pierre et Marie Curie (Paris vi)

Master Sciences et Technologie
Mention Mathématiques et Applications

M2 de Mathématiques fondamentales

Année universitaire 2012–2013

Responsables : Jean-François Dat et Tien Cuong Dinh



Secrétariat : Mme L. Dreyfuss

Campus de Jussieu, 1er étage, couloir 15-25, bureau 1.09)
4, place Jussieu, 75005 Paris

Tél & Fax 01 44 27 85 45
Mél master.math.fond@upmc.fr
Url http://www.master.math.upmc.fr/mathfond/

La figure en couverture est une famille de solutions quasipériodiques à deux fréquences, et périodiques modulo rotation, bifurquant à partir d'un équilibre relatif (point fixe modulo rotation) du problème des 5 corps, le pentagone régulier à 5 masses égales. Dans le repère ici choisi, la famille possède une symétrie d'ordre 20 contenant la symétrie chorégraphique, imposant à tous les corps de se poursuivre le long de la même courbe fermée à intervalle de temps fixé. La dernière solution tracée est plane, et périodique en repère fixe.

Table des matières

1 Le M2 de Mathématiques fondamentales

La spécialité *Mathématiques fondamentales* est une option de la mention *Mathématiques et Applications* du *Master de Sciences et Technologie* de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Elle s'adresse aux étudiants titulaires d'un M1 de mathématiques ou d'un titre équivalent et comprend deux parcours : "Mathématiques Recherche" et "Mathématiques avancées".

Un large spectre des mathématiques fondamentales est généralement couvert, avec des variations selon les années : théorie des nombres, géométrie algébrique, théorie de Lie, géométries analytique et différentielle, systèmes dynamiques, analyse fonctionnelle, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles, etc.

Parcours "Mathématiques Recherche"

Ce parcours, assez exigeant, s'adresse à tous les étudiants se destinant à un doctorat en Mathématiques fondamentales. Une fois ce doctorat accompli, les débouchés naturels sont les métiers de la recherche et de l'enseignement supérieur, au CNRS, à l'université ou dans les centres de recherche des grandes entreprises. Par ailleurs, on constate de plus en plus (comme cela est le cas depuis longtemps en Allemagne, au Royaume Uni ou aux Etats-Unis) qu'une thèse de mathématiques est un gage suffisant de puissance et de créativité intellectuelles pour être recruté par certaines entreprises de pointe.

Parcours "Mathématiques Avancées"

Ce parcours, plus abordable, intéressera les étudiants dont le but principal est de valider le Master, sans poursuivre en doctorat. Les cours proposés sont essentiellement les mêmes que pour le parcours "Recherche", mais les règles de validation sont assouplies, et il est aussi possible de valider certains cours de M1 avancés. Ce parcours est particulièrement bien adapté aux étudiants désirant préparer l'*agrégation*. Une fois validé leur M2, ceux-ci pourront suivre la prépa agreg de la Faculté de Mathématiques.

Les détails des règles permettant de valider l'un ou l'autre des parcours se trouvent sur la page "Organisation" de cette brochure.

2 Organisation et déroulement du M2

Comme tout M2, le cursus comprend des *cours* et un *stage*. Les règles de validation dépendent du parcours envisagé.

Les cours se répartissent en 4 périodes de 6 semaines, regroupées de la façon suivants :

- cours d'introduction de 24 heures sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours fondamentaux I et II, de 24 heures plus 12 heures de TD, sur 6 semaines (9 ECTS chacun).
- cours spécialisés, en général de 24h sur 6 semaines (9 ECTS chacun).

En règle générale, la validation de chaque cours est conditionnée par la réussite à un examen écrit qui se tient à la fin de l'enseignement concerné. Une session de rattrapage pourra être organisée en juin, si nécessaire : les étudiants intéressés par un rattrapage devront contacter directement les enseignants. Pour les cours spécialisés, la validation peut prendre d'autres formes : examen oral, mini-mémoire de synthèse sur un thème connexe, etc.

Voici les règles de validation des deux parcours.

Parcours "Mathématiques Recherche"

Les cours (27 ECTS)

Les étudiants doivent valider 3x9=27 ECTS de cours, dont au plus 9 ECTS en cours introductifs. Il est possible de valider des crédits de cours d'autres universités (Paris 7, Orsay...) après accord des responsables du M2, qui vérifieront notamment la cohérence du choix.

Le stage (30 ECTS)

Il consiste en un travail personnel de compréhension, d'explication et de synthèse d'un ou plusieurs articles de recherche, conclu par la rédaction d'un mémoire et une soutenance devant un jury. Le sujet du mémoire est bien souvent, mais pas nécessairement, un tremplin vers le futur sujet de thèse.

Il est conseillé de prospecter pour un directeur de stage potentiel dès que l'on est sûr de son sujet de prédilection. Fin mars semble être une limite raisonnable.

La date de soutenance du mémoire sera fixée en accord avec le directeur de recherche et les membres du jury. *Attention :* les étudiants qui désirent candidater à un **Contrat Doctoral** auprès de l'Ecole Doctorale devront avoir soutenu leur mémoire *avant fin juin.* Pour les autres, la limite ordinaire est *fin septembre.*

Les 3 ECTS d'ouverture

Ils consistent en l'apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Parcours “Mathématiques Avancées”

Les cours (27 ECTS)

Les étudiants doivent valider 27 ECTS sous la forme de cours. Outre les cours du M2, il est possible de valider certains cours du second semestre de M1, dont le niveau est intermédiaire entre M1 et M2. Il faudra pour cela demander l’accord d’un responsable qui s’assurera que

- le cours concerné n’a pas déjà été validé en M1.
- son contenu n’est pas inclus dans celui d’un cours de M2 déjà validé.

Par ailleurs, le nombre d’ECTS ainsi acquises est limité à 12.

Voici la liste des cours de M1 éligibles, dont on trouvera aussi une description sur la brochure générale du Master.

- Groupes et algèbres de Lie (6 ECTS)
- Introduction aux surfaces de Riemann (6 ECTS)
- Groupe fondamental et revêtements (6 ECTS)
- Théorie analytique des équations différentielles ordinaires (6 ECTS)
- Équations aux dérivées partielles (12 ECTS)
- Histoire des mathématiques (6 ECTS)

Le stage (30 ECTS)

Il est similaire à celui du parcours Recherche. Le sujet du mémoire pourra cependant être plus adapté au projet de l’étudiant, notamment si celui-ci se destine à l’agrégation.

Les 3 ECTS d’ouverture

Ils consistent en l’apprentissage du logiciel de typographie (La)TeX utilisé par la quasi-totalité des mathématiciens dans le monde.

Télé-enseignement

Une possibilité d’enseignement par correspondance est ouverte sur certains cours. Les étudiants par correspondance reçoivent ou téléchargent les polycopiés des cours, passent les examens à l’Université, et correspondent directement avec les enseignants (resp. leur directeur de stage) pour les questions pédagogiques (resp. la préparation de leur mémoire). Certains polycopiés sont disponibles sur les pages web des enseignants.

On consultera le site web du M2 pour des informations à jour concernant les cours disponibles par correspondance.

3 Inscription et candidature

L'inscription au master de Mathématiques fondamentales est réservée aux étudiants titulaires du M1, d'une maîtrise de mathématiques pures, ou d'un diplôme équivalent par décision individuelle d'équivalence du Président de l'Université.

En revanche, l'acceptation n'est pas automatique. Une sélection sera effectuée au vu des résultats obtenus dans les années antérieures. Voici les démarches pour candidater.

Inscription administrative par internet

Obligatoirement remplir un dossier d'inscription administrative via internet sur le site de la scolarité de l'université `http://www.upmc.fr/fr/formations/inscriptions_scolarite.html`. Si ce site est fermé, s'adresser au secrétariat.

Il sera demandé certains renseignements administratifs, après quoi il faudra imprimer le dossier ; de la persévérence peut s'avérer nécessaire ! Un numéro de dossier ainsi qu'un mot de passe vous seront alors attribués, qui permettront de suivre sur ce site l'évolution du statut de votre candidature.

Candidature

Ensuite, constituer un dossier de candidature et le remettre au secrétariat. *Demander au secrétariat la date limite de remise du dossier de candidature (courant septembre).*

Ce dossier doit comporter :

- le dossier d'inscription administrative imprimé
- le formulaire de candidature avec photo d'identité (téléchargeable sur le site internet)
- le relevé de notes de M1, délivré par son université d'origine.

Les étudiants ayant des diplômes étrangers doivent fournir en plus :

- la photocopie du programme des cours suivis pendant les quatre années d'études supérieures
- le relevé de notes des quatre années
- la photocopie des diplômes (le Service de la Scolarité en exigera ultérieurement une traduction assermentée ; voir par exemple le site des experts traducteurs `http://www.ceticap.com/`).

Résultats

Dans le cas d'une réponse favorable, l'étudiant recevra une lettre d'acceptation signée par le responsable du parcours. Dans tous les cas, l'avis de la commission sera consultable sur internet.

Bourses

Les étudiants désirant une bourse durant leur année de M2, doivent s'adresser au Bureau des bourses de l'université (campus de Jussieu). Il existe entre autres

- des bourses sur critère universitaire,
- des bourses sur critère social,
- des allocations d'études.

Voir les détails ainsi que les conditions d'attribution (de nationalité, de situation familiale, etc.) sur le site du bureau des bourses `http://www.upmc.fr/fr/vie_des_campus/bourses.html`.

Pour les deux premiers types de bourses ci-dessus il faut déposer une demande entre le 15 janvier et le 30 avril.

Par ailleurs, la Fondation Sciences Mathématiques de Paris offre des bourses d'études Ã travers son programme "Paris Graduate School of Mathematical Sciences". Consulter `http://www.sciencesmath-paris.fr/pgsm/`.

4 Cours de l'année 2012-2013

Chaque cours a un volume de 24h, sur 6 semaines. Les cours fondamentaux sont doublés par 12h de TD, qui sont assurés par l'auteur du cours (sauf mention du contraire, entre parenthèses).

Les cours ont généralement lieu sur le campus Jussieu. Certains auront lieu sur le site Chevaleret ou PRG (Paris 7).

Cours introductifs (10 septembre – 19 octobre 2012)

N. BERGERON et A. GUILLOUX	Introduction aux surfaces de Riemann	GC, GT
J.-Y. CHEMIN	Analyse	HFE
J.-F. DAT	Introduction à la théorie algébrique des nombres*	TN
J.-F. DAT	Introduction aux groupes et algèbres de Lie*	Lie
A. DUCROS	Les outils de la géométrie algébrique	GA
A. OANCEA	Géométrie différentielle	GT
D. GERARD-VARET (P7)	Analyse fonctionnelle des EDP d'évolution	HFE

Cours fondamentaux I (5 novembre – 14 décembre 2012)

A. DUCROS (M. FLORENCE)	Introduction à la théorie des schémas	GA
D. HERNANDEZ (P7)	Algèbres de Lie de dimension infinie et représentations I	Lie
A. HÖRING	Géométrie complexe et théorie de Hodge	GA, GC
F. LE ROUX	Systèmes dynamiques I *	Dyn
F. KLOPP	Une introduction à l'analyse semi-classique	HFE
L. MEREL (P7, P. CHAROLLOIS)	Théorie algébrique des nombres	TN
D. GERARD-VARET (P7)	Théorie Mathématique de la dynamique des fluides	HFE

Cours fondamentaux II (14 janvier – 22 février 2013)

N. BERGERON et A. GUILLOUX	Géométrie hyperbolique et représentations des groupes de surfaces	GT
D. CORDERO-ERAUSQUIN	Inégalités de convolution de Brascamp-Lieb	HFE
D. HERNANDEZ (P7)	Algèbres de Lie de dimension infinie et représentations II	Lie
I. ITENBERG	Géométrie algébrique réelle	GA
B. KLINGLER (P7)	Introduction aux motifs de Voevodsky	GA
P. LE CALVEZ	Systèmes dynamiques II *	Dyn
X. MA	Variétés Hamiltoniennes et quantification géométrique	GT

Cours spécialisés (11 mars – 19 avril 2013)

C. CORNUT	Systèmes d'Euler	TN
C. GUILLARMOU	Problèmes inverses en analyse et en géométrie	GT, HFE
I. ITENBERG	Géométrie algébrique réelle	GA
B. KAHN	Fonctions Zeta et L de variétés et de motifs	GA, TN
R. KRIKORIAN	Opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques	Dyn
A. OANCEA	Dynamique et rigidité en topologie symplectique	GT, Dyn
P. ZINN-JUSTIN	Intégrabilité Quantique	Lie, Phy
X. MA	Variétés Hamiltoniennes et quantification géométrique	GT

* Cours pouvant être suivi en télé-enseignement.

GA	Géométrie algébrique	TN	Théorie des nombres	Lie	Groupes et algèbres de Lie
GC	Géométrie complexe	GT	Géométrie et topologie	Dyn	Dynamique
Phy	Physique Mathématique				

HFE Analyse harmonique, analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles

Cours introductif

Surfaces de Riemann

Nicolas Bergeron et Antonin Guilloux

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

L'objectif de ce cours est de proposer une introduction aux divers aspects algébriques, analytiques et géométriques d'un des objets les plus riches et les plus importants des mathématiques, qui est la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine.

Contenu

– Définition. Variétés complexes de dimension 1. Exemples du plan complexe, de la sphère de Riemann et du demi-plan supérieur. Courbes elliptiques. Courbes algébriques et surface de Riemann associées ; surface de Riemann associée à une fonction analytique, exemple du log.

– Surfaces de Riemann obtenues comme quotients, énoncé du théorème d'uniformisation.

– Algébricité des surfaces de Riemann compactes abstraites qui possèdent une fonction méromorphe. Théorème de Belyi.

– Quelques aspects topologiques : genre, triangulation, formule de Riemann-Hurwitz, H_1 et relations bilinéaires de Riemann.

– Surfaces de Riemann vues comme surfaces riemanniennes : métriques, champs de vecteurs, écoulement, lemme de Weyl (un peu de théorie de Hodge).

– Théorème de Riemann-Roch.

Prérequis

Analyse complexe de M1 et bases de topologie et d'analyse réelle.

Bibliographie

– Reyssat. Quelques aspects des surfaces de Riemann.

– Bost. Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobian and Abelian varieties, dans From number theory to physics, Springer..

– Henri-Paul de Saint-Gervais. Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire.. `http://www.lcdpu.fr/livre/?GCOI=27000100107890&fa=complements`

Contact : `bergeron@math.jussieu.fr`

Cours introductif

Quelques outils de base en analyse

Jean-Yves Chemin

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est de fournir un certain nombre d'outils de base de l'analyse, outils qui sont nécessaires pour l'étude mathématique de nombreux problèmes et notamment ceux abordés dans les cours de D. Cordero, F. Klopp et C. Guillarmou.

Contenu

- Analyse de Fourier
- Espaces de Sobolev, inclusions de Sobolev
- Inégalités de Hardy Littlewood-sobolev
- Éléments de théorie spectrale
- Éléments de calcul pseudo-différentiel

Prérequis

Un cours de première année de Master d'analyse.

Bibliographie

- H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin. Fourier Analysis and Non Linear Partial Differential Equations. *Springer Verlag, 343, 2011*
- M. Reed, B. Simon. Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis.. *Academic Press, 1980*

Contact : `chemin@ann.jussieu.fr`

Cours introductif

Introduction à la théorie algébrique des nombres

Jean-François Dat

Notes de cours : `http://people.math.jussieu.fr/ dat/enseignement/enseignement.php`.

Présentation

Les objets principaux de ce cours sont les corps de nombres, *i.e.* les extensions finies de $\mathbb{Q}$, et leurs anneaux d'entiers.Contrairement à $\mathbb{Z}$,ces derniers ne sont généralement pas principaux, et n'ont pas la propriété d'unique factorisation. Cependant, on verra que leurs idéaux inversibles possèdent, eux, une propriété d'unique factorisation, et que l'analogue correct d'un "nombre premier" est la notion d'"idéal premier".

Du point de vue algébrique, les idéaux premiers sont les générateurs naturels du groupe des idéaux inversibles de l'anneau d'entiers. Nous verrons comment décomposer l'idéal engendré par un nombre premier en produit d'idéaux premiers, introduirons les notions de ramification et de déploiement, et l'effet de l'action du groupe de Galois, lorsque le corps de nombres est Galoisien. Les idéaux premiers engendrent aussi le "groupe de classes", un invariant très important qui mesure le défaut de principalité. Nous montrerons la finitude de ce groupe de classes.

D'un point de vue plus analytique, les idéaux premiers correspondent aux valeurs absolues "non-archimédiennes" du corps. Nous étudierons les complétions des corps de nombres pour de telles valeurs absolues, qui sont des extensions finies d'un corps $\mathbb{Q}_p$ de nombres p-adiques. On expliquera les implications algébriques et analytiques du lemme de Hensel.

Si le temps le permet, on introduira l'anneau des adèles et on discutera ses propriétés.

Contenu

– Exemples : corps quadratiques, corps cyclotomiques.
– Anneaux de Dedekind (factorisation des idéaux, exemples)
– Finitude du nombre de classes et théorème des unités de Dirichlet.
– Groupes de décomposition, d'inertie, de ramification.
– Complétions algébrique et analytique, corps p-adiques.

Prérequis

Une certaine familiarité avec les notions fondamentales d'algèbre commutative (localisation, anneaux noetheriens, artiniens, semi-locaux) sera bienvenue.

Bibliographie

– L. Merel. Nombres algébriques et nombres p-adiques. `http://www.institut.math.jussieu.fr/~merel/TAN.pdf`

– J. Milne. Algebraic Number Theory. `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/math676.pdf`

– J. Neukirch. Algebraic Number Theory. *Springer, 2009*

– J.P. Serre. Corps locaux. *Hermann, 1968*

Contact : `dat@math.jussieu.fr`

Cours introductif

Introduction aux groupes et algèbres de Lie

Jean-François DAT

Notes de cours : `http://people.math.jussieu.fr/ dat/enseignement/enseignement.php`.

Présentation

Un groupe de Lie est une variété différentielle munie d'une loi de groupe différentiable. Cette notion englobe en particulier tous les groupes matriciels classiques (linéaires, orthogonaux, unitaires, symplectiques) dont l'importance est fondamentale de la théorie des nombres à la physique des particules. Lorsque l'on différentie l'application de conjugaison $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$, on obtient sur l'espace tangent en l'origine une application bilinéaire appelée "crochet de Lie". Un espace vectoriel muni d'un tel crochet est appelé "Algèbre de Lie". Beaucoup de propriétés topologiques ou algébriques des groupes de Lie se lisent sur leurs algèbres de Lie. Cependant, l'étude de ces objets relève de l'algèbre linéaire, donc se révèlera beaucoup plus simple que celle des groupes.

Contenu

- Sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$ et application exponentielle.
- Groupes de Lie "abstraits". Algèbre de Lie d'un groupe de Lie et applications.
- Structure des algèbres de Lie : algèbres résolubles, nilpotentes, semi-simples. Forme de Killing
- Algèbre enveloppante, théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt
- Structure et classification des algèbres de Lie semis-simples. Sous-algèbres de Cartan, systèmes de racines, groupe de Weyl.
- Représentations des algèbres de Lie semi-simples.

Prérequis

L'étude des Algèbres de Lie relève de l'algèbre linéaire. Celle des groupes de Lie suppose des bases en topologie générale et en géométrie différentielle.

Bibliographie

- N. Bourbaki : Groupes et algèbres de Lie, Hermann 1968
- R. Carter : Lie algebras of finite and affine type, Cambridge 2005
- J. Humphreys : Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1978
- J.-P. Serre : Lie algebras and Lie groups, Benjamin 1965
- J.-P. Serre : Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin 1966

Contact : `dat@math.jussieu.fr`

Cours introductif

Les outils de la géométrie algébrique

Antoine Ducros

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est d'introduire un certains nombres d'outils et notions, dans différents domaines (catégories, algèbre commutative, théorie des faisceaux), qui sont constamment utilisés en géométrie algébrique à la Grothendieck. Conçu dans l'optique de préparer au cours d'introduction à la théorie des schémas, il peut présenter un intérêt pour tout étudiant intéressé par l'algèbre et la géométrie au sens large.

Contenu

– Le langage des catégories : catégories, foncteurs, équivalence de catégories, foncteurs représentables, produits fibrés, foncteurs adjoints.

– Algèbre commutative : idéaux premiers et maximaux, localisation, éléments entiers, going-up et going-down, normalisation de Noether, Nullstellensatz, dimension de Krull, produit tensoriel.

– Théorie des faisceaux : préfaisceaux, faisceaux, images directes et inverses de faisceaux, espaces anneés, espaces localement annelés, faisceaux de modules.

Prérequis

Il n'y a pas techniquement énormément de prérequis, sinon les définitions de base de l'algèbre commutative (anneaux, idéaux, modules...) ; mais une solide aisance en la matière est préférable. Je ne suivrai pas de livre spécifique ; je donne à titre purement indicatif deux références, le Matsumura pour l'algèbre commutative, et le chapitre II, paragraphe 1 du Hartshorne pour les faisceaux.

Bibliographie

– R. Harsthorne. Algebraic Geometry. *Graduate texts in math. 52, Springer-Verlag*

– H. Matsumura. Commutative ring theory. *Cambridge Studies in advanced math. 8, Cambridge University Press*

Contact : `ducros@math.jussieu.fr`

Cours introductif

Géométrie différentielle

Alexandru Oancea

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours est une introduction à la géométrie différentielle et riemannienne, avec des aperçus de topologie différentielle.

Contenu

- Variétés, champs de vecteurs, formes différentielles
- Fibrés, connexions, courbure
- Métriques, connexion et courbure riemanniennes. Géodésiques, complétude, théorèmes de comparaison
- Éléments de topologie différentielle

Prérequis

Géométrie différentielle de M1

Bibliographie

- Gallot, Hulin, Lafontaine. Riemannian Geometry. *3rd ed., Springer, 2004*
- Spivak. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. *Publish or Perish, 1979*
- Milnor. Topology from the differentiable viewpoint. *2nd ed., Princeton Univ. Press, 1997*
- Milnor. Morse theory. *Princeton Univ. Press, 1963*
- Warner. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. *2nd ed., Springer, 1983*

Contact : `oancea@math.unistra.fr`

Cours introductif

Analyse fonctionnelle des EDP d'évolution.

David Gerard-Varet (Travaux dirigés par Diogo Arsenio)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de présenter des notions d'analyse fonctionnelle indispensables dans l'étude des EDP non-linéaires d'évolution.

Remarque: la mise en oeuvre de ces notions dans le cadre des équations de la dynamique des fluides fera l'objet du cours fondamental 1 *Théorie mathématique de la dynamique des fluides.*

Contenu

– Espaces réflexifs, séparables.
– Topologie faible et faible *.
– Espaces de Sobolev.
– Application du théorème d'Ascoli aux EDP: théorèmes de Rellich et d'Aubin-Lions.

Prérequis

Cours d'introduction aux EDP (facultatif)

Bibliographie

– Haim Brezis. Analyse Fonctionnelle. *Dunod*
– Jacques Simon . Compact sets in $L^p(0,T;B)$. *Ann. Mat. Pura Appl. (1987)*

Contact : `gerard-varet@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Introduction à la théorie des schémas

Antoine Ducros

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le langage des schémas a été introduit par Grothendieck (et son école) dans les années 50-60 avec en ligne de mire les conjectures de Weil ; il permet de manipuler des variétés algébriques sur un corps ou même un anneau quelconques, et est toujours le cadre de travail de la géométrie algébrique contemporaine. On peut par exemple, grâce à lui, étant donné un système d'équations S à coefficients dans Z, voir les variétés définies par S sur les différents corps $\mathbb{F}_p$ (par réduction modulo p des équations) ainsi que sur Q (en oubliant que les coefficients sont entiers) comme les fibres d'un certain morphisme, et donc penser à cette collection de variétés (dont le corps de définition varie) comme à une famille, au sens géométrique du terme.

Contenu

- Spectre d'un anneau commutatif.
- Définition d'un schéma ; schémas irréductibles, composantes irréductibles, dimension... Morphismes de schémas.
- Foncteur des points d'un schéma.
- Faisceaux quasi-cohérents, immersions fermées.
- Schémas projectifs, morphismes projectifs.
- Si le temps le permet : faisceau des différentielles, lissité.

Prérequis

Je me fonderai sur le cours introductif *Les outils de la géométrie algébrique*. Je m'inspirerai assez librement du chapitre II du Hartshorne ; je conseille également la lecture de l'introduction de EGA.

Bibliographie

- R. Harsthorne. Algebraic Geometry. *Graduate texts in math. 52, Springer-Verlag*
- A. Grothendieck et J. Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 166, Springer-Verlag*

Contact : `ducros@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Théorie de Lie, algèbres de Lie de dimension infinie I

David HERNANDEZ

Notes de cours : `http://www.math.jussieu.fr/ hernandez/resumedan2.pdf`.

Présentation

Le but de ce cours est de donner une introduction aux concepts et outils fondamentaux de la théorie des algèbres de Lie (de dimension finie ou non) et notamment de leur théorie des représentations.

Contenu

– Groupes et algèbres de Lie. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie. Catégorie des représentations. Algèbres de Lie nilpotentes, résolubles, algèbres de Lie semi-simples. Théorèmes de Lie et de Engel. Critère de Cartan et théorème de Weyl.

– Algèbres de Lie de dimension infinie. Présentation de Serre. Classification de Cartan-Killing. Algèbres de Kac-Moody et leur structure. Sous-algèbres de Borel. Décomposition triangulaire. Réseau des poids, groupe de Weyl.

– Représentations des algèbres de Kac-Moody. Représentations de plus haut poids, modules de Verma. Catégorie $\mathcal{O}$. Paramétrisation des représentations simples. Représentations intégrables et extrémales. Produit tensoriels, morphisme de caractère, anneau de Grothendieck. Formule des caractères de Weyl-Kac.

Prérequis

Bibliographie

– V. CHARI ET A. PRESSLEY. A guide to quantum groups. *Cambridge University Press, Cambridge, 1995*

– J. HUMPHREYS. Introduction to Lie algebras and representation theory. *Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978*

– V. KAC. Infinite-dimensional Lie algebras. *Cambridge University Press, Cambridge, 1990*

– J-P. SERRE. Lie algebras and Lie groups. *1964 lectures given at Harvard Uni- versity, Lecture Notes in Mathematics, 1500, (2006)*

Contact : `hernandez@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Géométrie complexe et théorie de Hodge

Andreas Höring

Notes de cours : http://www.math.jussieu.fr/ hoering/.

Présentation

Le but de ce cours est de donner une introduction à la géométrie complexe, c'est-à-dire l'étude des variétés localement isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Comme une variété complexe est aussi un espace topologique, il est intéressant d'étudier les liens entre la structure complexe et la topologie. La théorie de Hodge est un outil puissant qui fournit ces liens entre géométrie et topologie. On verra que les résultats sont particulièrement pertinents dans le cas des variétés kähleriennes compactes qui sont une classe assez large et très importante de variétés complexes.

Contenu

- Variétés complexes, cohomologie de Dolbeault
- Fibrés holomorphes, métriques hermitiennes, connexion de Chern
- Opérateur de Hodge, laplacien de Hodge-de Rham
- Variétés kählériennes, décomposition de Hodge
- Théorèmes d'annulation, plongement de Kodaira

Prérequis

Surfaces de Riemann, géométrie différentielle (en particulier cohomologie de de Rham), notions de base des fonctions holomorphes en plusieurs variables (des notes seront disponibles avant le début du cours)

Bibliographie

- J.-P. Demailly. Complex analytic and algebraic geometry. *references* http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf
- C. Voisin. Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe. *SMF*
- R.O. Wells. Differential analysis on complex manifolds. *Graduate Texts in Mathematics 65*

Contact : hoering@math.jussieu.fr

Cours fondamental 1

Une introduction à l'analyse semi-classique

Frédéric Klopp

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Ce cours se veut une introduction à l'analyse semi-classique des équations aux dérivées partielles. On se concentrera sur le cas de l'équation de Schrödinger.

L'analyse semi-classique peut être définie comme l'analyse d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un petit paramètre. Son origine se trouve dans l'analyse de l'équation de Schrödinger issue de la mécanique quantique

$$ih\frac{\partial}{\partial t}u = -h^2\Delta u + Vu, \quad u_{|t=0} = u_0$$

ou de l'équation aux valeurs propres associée

$$-h^2\Delta u + Vu, \quad u_{|t=0} = Eu.$$

On cherche à décrire le comportement des solutions de ces équations dans la limite $h \to 0^+$. En particulier, on cherche à mettre en évidence les relations entre le comportement des solutions de ces équations et celui du système dynamique classique associé défini par le hamiltonien $H(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$.

Contenu

- Géométrie symplectique locale,
- Construction de solutions approchées : la méthode WKB.
- Opérateurs auto-adjoints.
- La transformée de Fourier et la méthode de la phase stationnaire.
- Opérateurs h-pseudo-différentiels et quantification.
- Valeurs propres et vecteurs propres dans la limite semi-classique.

Prérequis

Une bonne connaissance de l'analyse réelle, de théorie des distributions et de l'analyse fonctionnelle de master 1 est requise.

Bibliographie

– M. Dimassi et J. Sjöstrand. Spectral asymptotics in the semi-classical limit. *London Mathematical Society Lecture Note Series, no 268. Cambridge University Press, 1999.*

– Lawrence C. Evans et Maciej Zworski. Lectures on semi-classical analysis. `http://math.berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf`

– Bernard Helffer. Semi-classical analysis for the Schroedinger operator and applications. *Lecture Notes in Mathematics, no 1336. Springer-Verlag, Berlin, 1988.*

– André Martinez. n introduction to semiclassical and microlocal analysis. *Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.*

Contact : `klopp@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Systèmes dynamiques I

Frederic Le Roux (Travaux dirigés par F. Metzger)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Introduire les notions de base et les exemples classiques des systèmes dynamiques.

Contenu

- Dynamique topologique
- Théorie ergodique, existence de mesures invariantes, théorie spectrale
- Nombre de rotation des homéomorphismes du cercle
- Introduction aux actions de groupes sur le cercle
- Introduction à l'entropie

Prérequis

Topologie, analyse réelle, théorie de la mesure.

Bibliographie

- A. Katok, B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Cambridge University Press*
- P. Walters. An introduction to ergodic theory. *graduate texts in mathematics, Springer-Verlag*
- P. Le Calvez. Notes de cours 2011-2012. `http://www.master.math.upmc.fr/mathfond/2011-12/courslecalvez2011.pdf`

Contact : `lerouxf@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Théorie des nombres

Loïc Merel

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours fait suite au cours d'introduction de J-F. Dat. Nous étudierons les fonctions ζ de Dedekind. Nous aborderons la formule du nombre de classes. Puis nous donnerons une démonstration élémentaire du théorème de Chebotarev, via le théorème de la progression arithmétique. Ensuite nous aborderons quelques notions plus avancées en théorie algébrique des nombres en vue des cours du second semestre. Nous étudierons les corps quadratiques et cyclothymiques et d'autres exemples.

Contenu

- Fonctions ζ de Dedekind, fonctions L de Dirichlet
- Formule du nombre de classes
- Théorème de Chebotarev
- Corps cyclotomique
- Théorie du corps de classe

Prérequis

Prérequis: le cours de théorie algébrique des nombres de J-F. Dat. À défaut: le livre de P. Samuel, théorie algébrique des nombres.

Bibliographie

- P. Samuel. Théorie algébrique des nombres.
- R. Schoof. Catalan's conjecture.
- L. Washington. Introduction to cyclotomic fields.
- J-P. Serre. Cours d'arithmétique.
- J-P. Serre. Corps locaux.
- Cassels-Frölich (ed). Algebraic Number Theory.

Contact : `merel@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 1

Théorie mathématique de la dynamique des fluides

David Gerard-Varet (Travaux dirigés par Diogo Arsenio)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de présenter les résultats principaux de la théorie mathématique de la dynamique des fluides (équations d'Euler et de Navier-Stokes), *via* des méthodes d'analyse fonctionnelle.

Contenu

– Exemples d'EDP d'évolution en dynamique des fluides: les équations d'Euler et de Navier-Stokes.

– Théorie des solutions régulières (Rappel sur les EDO en dimension infinie. Méthode d'énergie. Flot local en temps pour Euler et Navier-Stokes. Critère d'existence d'un flot global: théorème de Beale-Kato-Majda.)

– Théorie des solutions irrégulières (Equation d'Euler bidimensionnelle: théorème de Yudovitch. Solutions turbulentes de Navier-Stokes: théorème de Leray.)

Prérequis

Quelques notions d'analyse fonctionnelle (topologie faible, espaces de Sobolev...). Le cours introductif *Analyse fonctionnelle des EDP d'évolution* est conseillé.

Bibliographie

– Andrew Majda et Andrea Bertozzi. Vorticity and Incompressible flow. *Cambridge University Press*

– Roger Temam. Navier-Stokes equations: Theory and numerical analysis. *AMS*

Contact : `gerard-varet@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 2

Géométrie hyperbolique et représentations des groupes de surface

Nicolas Bergeron et Antonin Guilloux (Travaux dirigés par Maxime Wolf)

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Le but de ce cours, qui fait suite au cours introductif sur les surfaces de Riemann, est d'étudier différentes structures géométriques dont on peut enrichir les surfaces de Riemann et d'étudier les espaces de modules de ces structures. Cela nous amènera au coeur de problématiques de recherche actuelles.

Contenu

- (G,X)-structures. Exemples : structures hyperboliques réelles et projectives complexes sur les surfaces.
- Groupes fuchsiens. Algébrisation des surfaces hyperboliques.
- Espace de Teichmuller.
- Structures projectives complexes et équations différentielles sur les surfaces de Riemann.
- Représentations des groupes de surfaces dans $SL(2,\mathbb{C})$ et dans $SL(2,\mathbb{R})$.
- Application : démonstration du théorème d'uniformisation pour les surfaces algébriques.

Prérequis

Le cours "Introduction aux surfaces de Riemann". D'autre part, il sera profitable d'avoir suivi le cours d'introduction "Géométrie différentielle".

Bibliographie

- Beardon. The geometry of discrete groups.
- Henri-Paul de Saint-Gervais. Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire. `http://www.lcdpu.fr/livre/?GCOI=27000100107890&fa=complements`

Contact : `bergeron@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 2

Inégalités de convolution de Brascamp-Lieb

Dario Cordero-Erausquin

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Les inégalités de Brascamp-Lieb généralisent les inégalités de convolution d'Young à un m-uplet de fonctions, et ce de façon optimale (c'est-à-dire avec des constantes optimales et avec la détermination des fonctions extrémales, en l'occurrence des gaussiennes). On peut aussi voir ces inégalités comme des formes généralisées de l'inégalité de Hölder pour des fonctions vivant sur des sous-espaces. Par exemple, un cas particulier connu sous le nom d'inégalité de Loomis-Whitney permet de majorer le volume d'un ensemble de $\mathbf{R}^n$ par le produit des mesures de ses projections sur les hyperplans de coordonnées.

Le but de ce cours est de présenter diverses méthodes permettant d'attaquer ces inégalités, méthodes par ailleurs utiles pour d'autres problèmes d'analyse harmonique. La liste ci-dessous contient quelques unes des méthodes abordées.

En cours de route, nous présenterons des applications géométriques ainsi que le pendant entropique de ces inégalités (sous-additivité de l'entropie, inégalité de Shannon-Stam, hypercontractivité du semi-groupe de Hermitte).

Si le temps le permet, nous nous intéresserons à des inégalités voisines que l'on peut traiter avec les méthodes décrites ci-dessous, telles que les inégalités de Sobolev optimales et les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev optimales. Enfin, nous aborderons peut-être aussi des développements récents (dus à Bennett, Carbery et Tao) liés à la conjecture de Kakeya.

Contenu

- réarrangement décroissant de fonctions (symétrisations)
- méthode du semi-groupe de la chaleur (évolution monotone)
- paramétrisation d'intégrales par transport optimal de mesure (au moins en dimension 1)
- méthode de tensorisation et des invariances

Prérequis

Familiarité avec les notions fondamentales de l'Analyse (en particulier avec l'intégration).

Bibliographie

- E. H. Lieb and M. Loss. Analysis. *AMS, 2001.*
- E. A. Carlen, E. H. Lieb, and M. Loss. A sharp analog of Young's inequality on S^N and related entropy inequalities. *J. Geom. Anal., 14 (2004), no. 3, 487-520.*
- C. Villani. Topics in Optimal Transportation. *A.M.S., 2003.*
- A. Burchard. A Short Course on Rearrangement Inequalities. http://www.math.utoronto.ca/almut/teaching.html

Contact : cordero@math.jussieu.fr

Cours fondamental 2

Théorie de Lie, algèbres de Lie de dimension infinie II

David HERNANDEZ

Notes de cours : `http://www.math.jussieu.fr/ hernandez/resumedan2.pdf`.

Présentation

Le but de ce cours spécialisé est d'étudier les analogues de dimension infinie (et quantiques) des algèbres de Lie, ainsi que leurs représentations et applications. On portera une attention particulière aux algèbres affines et à leurs représentations. On étudiera notamment la catégorie de Drinfeld et le produit de fusion.

Contenu

– Algèbres affines et de lacets. Isomorphisme entre les présentations des algèbres affines. Algèbres de Virasoro et de Heisenberg. Racines réelles, racines imaginaires. Représentations de dimension finie et polynômes de Drinfeld.

– Produit de fusion. Lemme de Schur, niveau. Catégorie $\mathcal{O}_k$ et produit de fusion sur $\mathcal{O}_k$ via l'espace des fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

– Blocs conformes et équation de Knizhnik-Zamolodchikov. Lien avec la théorie conforme des champs de Wess-Zumino-Witten et le produit de fusion. Opérateurs d'entrelacement et solutions de l'équation de Knizhnik-Zamolodchikov.

– Catégorie de Drinfeld et groupes quantiques. Catégorie tensorielle de Drinfeld. Groupes quantiques et représentations (type fini). Equivalence des catégories.

– Algèbres affines quantiques. Présentation de Drinfeld. Représentations de dimension finie. Anneau de Grothendieck et q-caractères.

Prérequis

Cours du premier semestre : Théorie de Lie, algèbres de Lie de dimension infinie I.

Bibliographie

– V. CHARI ET A. PRESSLEY. A guide to quantum groups. *Cambridge University Press, Cambridge, 1995.*

– P. ETINGOF, I. FRENKEL ET A. KIRILLOV. Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations. *Mathematical Surveys and Monographs, 58. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998*

– E. FRENKEL ET D. BEN-ZVI. Vertex algebras and algebraic curves. *Second edition, Mathematical Surveys and Monographs, 88, American Mathematical Society, Providence, RI (2004)*

– E. FRENKEL. Langlands correspondence for loop groups. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 103. Cambridge University Press, Cambridge, 2007*

– D. HERNANDEZ. An Introduction to Affine Kac-Moody Algebras. *CTQM Master Class Series 2 (2006), 1–20*

– V. KAC. Infinite-dimensional Lie algebras. *Cambridge University Press, Cambridge, 1990*

Contact : `hernandez@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 2

Introduction à la topologie des variétés algébriques réelles

Ilia Itenberg (Travaux dirigés par Erwan Brugallé)

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Dans ce cours, on étudiera principalement les courbes algébriques dans le plan projectif réel et les surfaces algébriques dans l'espace projectif réel de dimension 3. La topologie de ces variétés fait l'objet de la première partie du 16-ème problème de D. Hilbert. On parlera de restrictions classiques sur la topologie des courbes et des surfaces algébriques réelles, ainsi que de constructions de ces variétés (en particulier, du patchwork de Viro, une construction de variétés algébriques qui est directement liée à la géométrie tropicale).

Contenu

- Courbes algébriques réelles planes et projectives.
- Inégalité de Harnack. Courbes maximales.
- Restrictions classiques sur la topologie des courbes réelles. Isotopies rigides.
- Constructions de courbes par la méthode de petites perturbations.
- Patchwork de Viro et ses applications. Relations avec la géométrie tropicale.
- Surfaces algébriques dans l'espace projectif réel de dimension 3.

Prérequis

Cours "*Groupe fondamental et revêtements*" de M1. Cours introductif "*Surfaces de Riemann*" de M2. Il serait préférable (mais pas absolument nécessaire) d'avoir une certaine familiarité avec la géométrie différentielle (cours introductif "*Géométrie différentielle*" de M2) et la géométrie algébrique (cours introductif "*Les outils de la géométrie algébrique* " de M2).

Bibliographie

- G. Wilson. Hilbert's sixteenth problem. *Topology 17 (1978), 53 - 74.*
- A. Degtyarev, V. Kharlamov. Topological properties of real algebraic varieties: Rokhlin's way. *Russian Math. Surveys 55 (2000), no. 4, 735 - 814.*

Contact : `itenberg@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 2

Introduction aux motifs de Voevodsky

Bruno Klingler

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but de ce cours est de décrire la construction par Voevodsky d'une catégorie triangulée de motifs et les relations de cette catégorie à des objets plus classiques comme les groupes de Chow, la K-théorie de Milnor ou la cohomologie étale.

Contenu

- Cohomologie motivique
- Complexes de cycle et la catégorie des motifs de Voevodsky
- "Cancellation theorem"
- Relation avec les groupes de Chow, dualité
- Relation avec la K-théorie de Milnor
- Motifs étales et théorème de rigidité de Suslin

Prérequis

Notions de base en géométrie algébrique (cours d'A. Ducros à P6) et de topologie algébrique (cours de C.Blanchet et J.Lannes à P7)

Bibliographie

– Mazza, Voevodsky, Weibel. Lectures in motivic cohomology. *Clay Monographs in Math., vol.2* `http://www.math.rutgers.edu/~weibel/motiviclectures.html`

– Voevodsky, Suslin, Friedlander. Cycle, transfers and motivic homology. *Annals of Math Studies 143*

– Beilinson, Vologodsky. A DG guide to Voevodsky motives. *GAFA vol.17 1709-1787* `atlas.mat.ub.es/grgta/articles/BeVo.pdf`

Contact : `klingler@math.jussieu.fr`

Cours fondamental 2

Déformations de représentations galoisiennes

Ariane Mézard

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

La théorie des déformations est une version algébrique du calcul différentiel. Elle permet de paramétrer des familles d'objets ayant des propriétés communes par un anneau, dit anneau universel de déformations. Dans ce cours, nous considérerons le cas des déformations de représentations galoisiennes. La détermination de cet anneau dans ce cadre est au coeur de nombreuses conjectures arithmétiques actuelles.

Contenu

- Foncteurs de déformations
- Critère de représentabilité
- Cohomologie galoisienne
- Exemples et applications

Prérequis

Cours introductifs de J.-F. Dat et A. Ducros - Cours fondamental I de L. Merel

Bibliographie

- B. Mazur. Deforming Galois representations. *Galois groups over Q, Springer 1989.*
- M. Schlessinger. Functors on Artin rings. *Trans. AMS 130, 1968.*
- J.-P. Serre. Corps locaux. *Hermann.*

Contact : @

Cours fondamental 2

Systèmes dynamiques II

Patrice Le Calvez (Travaux dirigés par ???????)

Des notes de cours seront disponibles.

Présentation

Ce cours est une suite naturelle de cours Systèmes Dynamiques I. Après avoir introduit les différentes notions d'entropie, nous nous intéresserons aux systèmes uniformément hyperboliques et terminerons par des versions plus faibles d'hyperbolicité en introduisant la notion d' exposant de Lyapounov.

Contenu

- Entropie topologique, entropie métrique, principe variationel, lien avec l'action en homologie
- Sous-décalages de type fini, partition de Markov
- Théorème de Hartman-Grobman, théorème de la variété stable
- Automorphismes hyperboliques du tore
- Cocycles, exposants de Lyapounov

Prérequis

Il est préférable d'avoir suivi le cours Systèmes Dynamiques I, de Frédéric Le Roux car le cours en est une suite naturelle

Bibliographie

- A. Katok, B. Hasselblatt. Introduction to he modern theory of dynamical systems. *Cambridge University Press*
- P. Walters. An introduction to ergodic theory. *Graduate text in Mathematics*

Contact : `lecalvez@math.jussieu.fr`

Cours spécialisé

Systèmes Eulériens

Christophe CORNUT

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Les systèmes eulériens ont été inventés il y a un peu plus de 20 ans par Kolyvagin. Ce sont des objets intermédiaires entre les fonctions L (dont ils reflètent les facteurs locaux) et les groupes de Selmer (dont ils contrôlent précisément la structure). Il y a très peu d'exemples connus et le formalisme qui les décrit est encore insatisfaisant, malgré des progrès dus à Mazur et Rubin. Les concepts essentiels de la méthode de Kolyvagin sont cependant bien compris. Nous en illustrerons la puissance avec le plus accessible des systèmes eulériens, celui des unités cyclotomiques.

Contenu

- Cohomologie des représentations Galoisiennes, théorèmes de dualité et groupes de Selmer
- Systèmes eulériens et Systèmes de Kolyvagin
- Corps de nombres: groupe d'unités, groupe de classe d'idéaux et fonction zeta
- Unités cyclotomiques, conjecture de Gras, conjecture principale d'Iwasawa

Prérequis

Cours de théorie des nombres

Bibliographie

– KARL RUBIN. Euler Systems. *Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press n 147*

– BARRY MAZUR ET KARL RUBIN. Kolyvagin Systems. *In: Mem. Amer. Math. Soc. 168 (2004), n 799* `http://people.math.jussieu.fr/~cornut/ES/Ref/KolySys.pdf`

– BARRY MAZUR ET KARL RUBIN. Introduction to Kolyvagin Systems. *In: Contemp. Math., n 358, Amer. Math. Soc. (2004)* `http://people.math.jussieu.fr/~cornut/ES/Ref/IntroKolySys.pdf`

– KARL RUBIN. Euler Systems and Kolyvagin Systems. *In: Arithmetic of L-functions, 449/499, IAS/Park City Math. Ser., 18, Amer. Math. Soc. (2011)* `http://people.math.jussieu.fr/~cornut/ES/Ref/ESandKS.pdf`

Contact : `cornut@math.jussieu.fr`

Cours spécialisé

Problèmes inverses

Colin Guillarmou

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Le but du cours est de décrire quelques résultats en problèmes inverses, en particulier sur le problème de Calderon. La question est de savoir si l'ensemble des données de Cauchy $(u|_{\partial\Omega}, \partial_\nu u|_{\partial\Omega})$ au bord d'un domaine $\Omega \subset R^n$ (ou d'une variété) pour l'équation elliptique $\mathrm{div}(\gamma\nabla u) = 0$ déterminent γ. Ici, γ est un tenseur symétrique defini positif appelé conductivité, ν est la normale au bord et div est la divergence. On montrera comment résoudre ce problème dans certains cas et sur certaines variétés. Un autre problème qui pourrait être abordé, si le temps le permet, est le problème de déterminer une métrique sur un domaine à bord à partir de la longueur de ses géodésiques reliant les points du bord. Ces deux problèmes sont reliés en dimension 2.

Contenu

- Analyse harmonique, estimées elliptiques
- Opérateurs Dirichlet-to-Neumann
- surfaces de Riemann à bord/opérateurs d-bar et fonctions holomorphes
- Construction d'optiques géométriques complexes/estimées de Carleman
- Relations entre le problème de Calderón et la rigidité des domaines simples avec même distance de bord

Prérequis

Analyse harmonique, espaces de Sobolev, ellipticité, notions de géométrie riemannienne (en particulier en dimension 2)

Bibliographie

- M.Salo. Lecture notes on the Calderón problem. *Lecture Notes* `http://www.rni.helsinki.fi/~msa/`
- M.Salo. Lecture notes on inverse problems on Riemannian manifolds. *Inside Out II, edition MSRI (2012)* `http://www.rni.helsinki.fi/~msa/`
- C.Guillarmou/L.Tzou. Survey on Calderon inverse problem in dimension 2. *Inside Out II, edition MSRI (2012)* `http://www.math.ens.fr/~guillarmou/publi.html`
- L. Pestov/G. Uhlmann. Two dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid. *Annals of Math (2) 161 (2005), no. 2, 1093-1110.* `arXiv:math/0305280`
- G. Paternain. The X-Ray transform in geometry and dynamics. *Lecture notes* `http://www.dpmms.cam.ac.uk/~gpp24/teaching.html`

Contact : `cguillar@dma.ens.fr`

Cours spécialisé

Propriétés topologiques des variétés algébriques réelles

Ilia Itenberg

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Ce cours fait suite au cours "*Introduction à la topologie des variétés algébriques réelles*". Le but du cours est de présenter plusieurs résultats centraux de la topologie des variétés algébriques réelles. On parlera tout particulièrement de surfaces algébriques réelles et étudiera les déformations équivariantes de certaines surfaces (telles que, par exemple, les surfaces rationnelles et les surfaces $K3$).

Contenu

– Variétés réelles vues comme variétés complexes munies d'une involution anti-holomorphe.

– Problèmes de classification des variétés réelles dans une classe donnée de déformation de variétés complexes.

– Problèmes de finitude et de quasi-simplicité.

– Outils de la topologie des involutions.

– Applications à la topologie des surfaces et la topologie des courbes dans les surfaces.

– Déformations équivariantes de surfaces spéciales réelles.

Prérequis

Cours "*Introduction à la topologie des variétés algébriques réelles*" de M2. Familiarité avec la géométrie complexe (cours "*Géométrie complexe et théorie de Hodge*" de M2).

Bibliographie

– G. Wilson. Hilbert's sixteenth problem. *Topology 17 (1978), 53 - 74.*

– A. Degtyarev, V. Kharlamov. Topological properties of real algebraic varieties: Rokhlin's way. *Russian Math. Surveys 55 (2000), no. 4, 735 - 814.*

– A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov. Real Enriques surfaces. *Lect. Notes Math., vol. 1746, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.*

Contact : `itenberg@math.jussieu.fr`

Cours spécialisé

Fonctions zêta et L de variétés et de motifs

Bruno Kahn

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

Deux types de séries de Dirichlet sont associées aux schémas "arithmétiques": la fonction zêta d'un schéma de type fini sur $\mathbf{Z}$ et la fonction L de H^i d'une variété projective lisse sur un corps global (Serre). Le but du cours est d'étendre ces définitions aux motifs triangulés à la Voevodsky: fonctions zêta pour les motifs sur $\mathbf{Z}$ et fonctions L pour les motifs sur un corps global. Les deux types de fonctions se factorisent en produits eulériens, sont multiplicatives sur les triangles exacts et ont des propriétés de rationalité et d'équation fonctionnelle en égale caractéristique. Dans le cas d'un schéma S de type fini sur $\mathbf{Z}$, la fonction zêta de son motif est égale à la fonction zêta de S. Par contre, dans le cas d'une variété projective lisse X sur un corps global, la fonction L associée au motif de X a les mêmes facteurs eulériens que le produit alterné des fonctions L de Serre aux places de bonne réduction, mais pas aux places de mauvaise réduction en général.

Le cours rappellera les fonctions zêta et L "classiques" et esquissera la preuve de leurs propriétés fondamentales en caractéristique p: rationalité, équation fonctionnelle, hypothèse de Riemann. Pour cela, des rappels de cohomologie l-adique seront donnés. Ensuite je décrirai les catégories triangulées de motifs utilisées et le formalisme des 6 opérations de Voevodsky-Ayoub dans ce cadre, en le comparant au formalisme en cohomologie étale. Finalement j'introduirai les fonctions zêta et L de motifs et démontrerai leurs propriétés fondamentales, la plus difficile étant une équation fonctionnelle explicite pour la fonction L d'un motif de Voevodsky sur un corps global de caractéristique positive.

Si le temps le permet, je discuterai aussi des grandes conjectures concernant ces fonctions (conjectures de Lichtenbaum, Soulé, Deligne et Beilinson). Mais le cours proprement dit ne repose sur aucune conjecture.

Contenu

- Séries de Dirichlet, fonctions zêta et L "classiques"
- Les conjectures de Weil
- Rappels de cohomologie l-adique, esquisse de démonstration des conjectures de Weil
- Motifs purs et motifs mixtes sur un corps: de Grothendieck à Voevodsky
- Motifs triangulés sur une base
- Construction des fonctions zêta et L triangulées, preuve de leurs propriétés fondamentales

Prérequis

Une connaissance de base de géométrie algébrique et de cohomologie étale; familiarité avec l'algèbre homologique, la manipulation de catégories, les catégories triangulées. Familiarité avec la théorie algébrique des nombres et les bases de la théorie analytique des nombres (fonctions L de Dirichlet et d'Artin).

Bibliographie

- S. Lang. Algebraic number theory. *Springer*

– R. Hartshorne. Algebraic geometry (Ch. I et II). *Springer*

– J. Milne. Etale cohomology. *Princeton Univ. Press*

– J.-L. Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque 239*

– C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel. Lecture notes on motivic cohomology. *Clay Math. Institute*

– J. Ayoub. Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. *Astérisque 314-315*

Contact : `kahn@math.jussieu.fr`

Cours spécialisé

Opérateurs de Schrödinger Quasipériodiques : théorie spectrale et dynamique

Raphaël Krikorian

Notes de cours : `http://www.proba.jussieu.fr/ krikorian/`.

Présentation

Le but du cours est d'étudier les propriétés spectrales des opérateurs de Schrödinger 1D avec des potentiels quasi-périodiques. Un outil important dans cette approche est l'étude de la dynamique des cocycles de Schrödinger associés. Cette approche, qui a déjà fait ses preuves dans la théorie ces 20 dernières années, est à la base des résultats spectaculaires obtenus récemment par A. Avila.

Contenu

- Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints, opérateurs de Schrödinger, théorème de Berezansky, opérateurs dynamiquement définis, mesures spectrales et densité intégrée d'états.
- Cocycles de Schrödinger, rappels de théorie ergodique, nombre de rotation et exposant de Lyapunov, fonctions m, hyperbolicité uniforme et non-uniforme, théorème d'Oseledec
- Liens entre les aspects spectraux et dynamiques, spectre/hyperbolicité, densité d'états/ nombre de rotation. Formule de Thouless
- Réductibilité des cocyles, théorie KAM, thórème de Dinaburg-Sinai et d'Eliasson. Liens avec le spectre absolument continu.
- Localisation d'Anderson, importance de l'hyperbolicité non-uniforme.
- Dualité d'Aubry. Application à l'étude de l'opérateur presque-Mathieu.

Prérequis

Espaces de Hilbert, rudiments d'analyse complexe (fonctions holomorphes et harmoniques), séries de Fourier, théorie de la mesure, ergodicité.

Le cours de P. Le Calvez.

Bibliographie

- R. Carmona, J. Lacroix . Spectral theory of random Schrödinger operators. *Birkhauser* `URL`
- Th. Ransford. Potential theory in the complex plane. *LMS*
- P. Walters. An introduction to ergodic theory. *Springer*

Contact : `raphael.krikorian@math.jussieu.fr`

Cours spécialisé

Dynamique et rigidité en topologie symplectique

Alexandru Oancea

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

À la différence des variétés riemanniennes, les variétés symplectiques n'ont pas d'invariants locaux, étant toutes modelées sur $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme symplectique standard. Par opposition, leur géométrie globale est très riche. Le but de ce cours est d'illustrer comment des phénomènes de nature dynamique entrainent des phénomènes de rigidité en topologie symplectique, et inversement. L'outil principal est constitué par la théorie des courbes pseudo-holomorphes inventée par Gromov.

Contenu

– Géométrie symplectique et géométrie de contact. Motivation, exemples, formes locales, symétries. Flexibilité vs. rigidité.

– Équation de Cauchy-Riemann non-linéaire. Théorème de compacité. Espaces de modules de courbes pseudo-holomorphes dont le domaine est une surface de Riemann fermée (à bord).

– Théorème de non-tassement. Obstructions à l'existence de plongements lagrangiens. Existence d'orbites périodiques de systèmes hamiltoniens. Fermeture C^0 du groupe des difféomorphismes symplectiques dans le groupe des difféomorphismes.

– Courbes pseudo-holomorphes dont le domaine est une surface de Riemann épointée. Existence d'orbites de Reeb fermées.

Prérequis

Les cours introductifs suivants : surfaces de Riemann, géométrie différentielle, outils de base en analyse.

Bibliographie

– V.I. Arnol'd. Les méthodes mathématiques de la mécanique classique. *Éditions Mir, Moscou, 1976 (GTM 60, Springer, 1978).*

– M. Audin, J. Lafontaine. Holomorphic curves in symplectic geometry. *Birkhauser, Basel, 1994.*

– H. Geiges. An introduction to contact topology. *Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.*

– H. Hofer, E. Zehnder. Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics. *Birkhauser, Basel, 1994.*

– D. McDuff, D. Salamon. Introduction to symplectic topology. *Oxford Univ. Press, 1998.*

– D. McDuf, D. Salamon. J-holomorphic curves and symplectic topology. *AMS Coll. Pub. Vol. 52, AMS, 2004.*

Contact : `oancea@math.unistra.fr`

Cours spécialisé

Intégrabilité quantique

Paul Zinn-Justin

Pas de notes de cours prévues.

Présentation

L'objet du cours est l'étude des structures mathématiques qui sous-tendent certains modèles de physique de basse dimension: modèles de mécanique statistique à deux dimensions dits "exactement solubles" et modèles intégrables en mécanique quantique à une dimension.

Contenu

– **Motivation.** Formalisme de la mécanique statistique et de la mécanique quantique.

– **Integrabilité quantique.** Equation de Yang–Baxter, lien avec les algèbres quantiques affines.

– **Ansatz de Bethe algebrique.** Construction détaillée dans le cas de rank 1. Operateur Q de Baxter.

– **Quantum Knizhnik-Zamolodchikov.** Opérateurs de vertex, équation qKZ. Application aux fonctions de corrélation de modèles intégrables.

Prérequis

Il est conseillé d'avoir suivi Algèbres de Lie de dimension infinie et représentations I et II (D. Hernandez)

Bibliographie

– M. Jimbo and T.Miwa. Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models. *AMS, Providence, 1995*

– A. Doikou, S. Evangelisti, G. Feverati, N. Karaiskos. Introduction to Quantum Integrability. *Int. J. Mod. Phys. A25: 3307-3351 (2010)* `http://arxiv.org/abs/0912.3350`

Contact : `pzinn@lpthe.jussieu.fr`