

SYSTÈMES DYNAMIQUES : COURS FONDAMENTAL II

PARTIE II : DIFFÉOMORPHISMES CONSERVATIFS DE L'ANNEAU

§1. Le théorème de Poincaré-Birkhoff

H. Poincaré a été le premier à observer que l'étude dynamique des systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté pouvait se ramener à celle de difféomorphismes de surfaces. Rappelons qu'une *variété symplectique* est une variété M munie d'une forme différentielle fermée de degré deux ω qui est non dégénérée (i.e. pour tout point $z \in M$, la forme linéaire $\omega(z)$ définie sur $T_z M$ est non dégénérée). L'existence d'une telle forme implique, bien sûr, que M est de dimension paire. Si $H : M \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe C^p , $p \geq 1$, on peut définir un champ de vecteurs X_H sur M , le *gradient symplectique* de H par la formule $i_{X_H} \omega = -dH$. Le théorème de Darboux exprime que pour tout point $z \in M$, il existe un système de coordonnées $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ au voisinage de z , dans lequel la forme s'écrit $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$. Dans ce système de coordonnées le champ X_H s'écrit

$$X_H = \sum_{i=1}^n -\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Le système dynamique associé s'appelle un *système hamiltonien*, il est associé au *hamiltonien* H . Un exemple important de variété symplectique est l'espace cotangent d'une variété M , qui est muni d'une structure symplectique canonique. Si (q_1, \dots, q_n) est une carte (i.e. un système de coordonnées locales) définie sur une partie ouverte U de M , on a un système de coordonnées canonique $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ sur $T^*(U)$, où on écrit $\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$ une forme différentielle d'ordre 1 définie sur U . Il existe alors une unique forme de degré un λ sur T^*M , la *forme de Liouville*, qui s'écrit $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$ sur T^*U . La forme $\omega = d\lambda$, qui s'écrit $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ dans T^*U , est la forme symplectique canonique de T^*M .

Donnons un exemple de système hamiltonien. Fixons des réels strictement positifs m_1, m_2, \dots, m_n, G . Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbf{R}^3 puis considérons l'hamiltonien

$$H : (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\|p_i\|^2}{m_i} - G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|q_j - q_i\|}$$

défini sur $T^*W \sim W \times (\mathbf{R}^3)^n \sim W \times \mathbf{R}^{3n}$, où

$$W = \{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbf{R}^3 \mid q_i \neq q_j\} \subset (\mathbf{R}^3)^n \sim \mathbf{R}^{3n}.$$

Le champ de vecteurs hamiltonien s'écrit

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_j - q_i\|^3} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Le système associé décrit le mouvement de n corps de masses m_1, \dots, m_n dans \mathbf{R}^3 , soumis à la loi de la gravitation universelle. Remarquons que $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\|p_i\|^2}{m_i}$ est l'énergie cinétique, que $-G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$ est l'énergie potentielle et que H est l'énergie totale du système. Plus généralement, les systèmes de la mécanique classique sont décrits par des systèmes hamiltoniens.

Parmi les propriétés importantes des systèmes hamiltoniens, on peut noter que le flot (φ_t) induit par X_H laisse invariante la fonction H (on a $H \circ \varphi_t = H$) puisque $L_{X_H} dH = i_{X_H} dH = i_{X_H} (-i_{X_H} \omega) = 0$, cette fonction est une *intégrale première du mouvement*. On peut noter

également que le flot préserve la forme ω (on a $\varphi_t^*(\omega) = \omega$) puisque $L_{X_H}\omega = i_{X_H}d\omega + d(i_{X_H}\omega) = -ddH = 0$, et donc également la forme volume $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$. Si c est une valeur régulière de H , l'ensemble $H^{-1}(\{c\})$ est une hypersurface de classe C^p invariante par le flot (φ_t) . Supposons que $\Sigma \subset H^{-1}(\{c\})$ soit une hypersurface de classe C^p de $H^{-1}(\{c\})$ transverse à X_H et qu'il existe un point $z_0 \in \Sigma$ dont l'orbite positive revient dans Σ et notons $z_1 = \varphi_{t_0}(z_0)$, $t_0 > 0$, le premier point d'intersection. Il existe alors un voisinage $W_0 \subset \Sigma$ de z_0 , un voisinage $W_1 \subset \Sigma$ de z_1 et une fonction $\tau : W_0 \rightarrow]0, +\infty[$ de classe C^p vérifiant $\tau(z_0) = t_0$, telle que pour tout $z \in W_0$, le point $\varphi_{\tau(z)}(z)$ est le premier point où l'orbite positive de z rencontre Σ . L'application $f : z \mapsto \varphi_{\tau(z)}(z)$ induit donc un difféomorphisme de classe C^p entre W_0 et W_1 . Cette application, *l'application de premier retour* définie sur la *section de Poincaré* Σ , est *symplectique* elle préserve la forme symplectique ω_Σ (qui est non dégénérée puisque Σ est incluse dans une hypersurface de niveau et puisque X est transverse à Σ) et préserve donc la forme volume ω_Σ^{n-1} . Le cas intéressant est le cas où l'orbite de z_0 est périodique et où ce point est fixé par f . Dans ce cas, pour tout $n \geq 0$, la suite $(f^k(z))_{0 \leq k \leq n}$ est bien définie si z est assez proche de z_0 . On a un système dynamique local dont les propriétés vont se transmettre au système dynamique original. Par exemple une orbite périodique de f va correspondre à une orbite périodique du flot. Remarquons qu'une telle section peut être construite dès que z_0 est un point périodique du flot et que le choix d'une autre section Σ' définit un difféomorphisme local f' qui est conjugué à f . En particulier l'étude d'un système dynamique hamiltonien à deux degrés de liberté au voisinage d'une orbite périodique peut se déduire des difféomorphismes du plan préservant l'aire au voisinage d'un point fixe. Comme nous le verrons plus loin, dans certains cas (par exemple si z_0 est un *point fixe elliptique non dégénéré*), il existera des courbes entourant z_0 invariantes par f_0 et nous aurons donc un système dynamique global en prenant la restriction à un disque bordé par une courbe invariante. Comprendre ce qui se passe au voisinage de z_0 sera un de objectifs du cours. En considérant un système de coordonnées polaires symplectique, on aura un système dynamique défini sur un anneau.

Il arrive que l'on puisse construire une section globale et obtenir un système dynamique $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$. C'est ce que Poincaré réussit à faire dans le cas du problème à trois corps restreint (un cas limite non intégrable important du problème à trois corps), amenant celui-ci à proposer le résultat suivant (et à le prouver dans les cas simples), appelé *dernier problème géométrique de Poincaré* et prouvé un peu plus tard par Birkhoff (et donc appelé également *théorème de Poincaré-Birkhoff*).

THÉORÈME 1.1 : *Soit F un homéomorphisme de l'anneau $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ homotope à l'identité, c'est-à-dire préservant l'orientation et laissant invariant chaque cercle frontière. Écrivons $p_1 : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ pour la première projection définie sur le revêtement universel $\mathbf{R} \times [0, 1]$ et supposons que :*

- i) F préserve la mesure de Lebesgue $dx dy$;
- ii) il existe un relèvement f de F à $\mathbf{R} \times [0, 1]$ qui vérifie :

$$p_1 \circ f(x, 0) < x < p_1 \circ f(x, 1),$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Alors il existe au moins deux points fixes de f qui se projettent en deux points fixes distincts de F .

La mesure de Lebesgue qui apparaît dans i) peut être remplacée par n'importe quelle mesure finie à support total. Comme l'avait déjà remarqué Birkhoff, on peut remplacer la condition i)

par une condition topologique. Par exemple, on obtiendra deux points fixes si on suppose que F n'a pas de points errants ; on obtiendra un point fixe si on suppose la condition plus faible suivante : toute courbe simple essentielle rencontre son image. Un corollaire important est que sous les hypothèses du théorème, on a une infinité de points périodiques. Remarquons que la restriction de F à chaque bord est conjuguée (par la première projection) à un homéomorphisme de \mathbf{T}^1 et que le choix du relèvement f permet de définir le nombre de rotation (réel) sur chaque bord. La condition **ii**) implique alors que le nombre de rotation du bord inférieur est strictement négatif et celui du bord supérieur strictement positif. Écrivons $T : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$ pour le générateur du groupe des automorphismes du revêtement. On obtient :

COROLLAIRE 1.2: *Soit F un homéomorphisme de $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ homotope à l'identité et préservant la mesure de Lebesgue. Fixons un relèvement f et supposons que le nombre de rotation ρ_0 du bord inférieur est plus petit que le nombre de rotation ρ_1 du bord supérieur. Alors, pour tout nombre rationnel $\rho = p/q \in]\rho_0, \rho_1[$ écrit sous forme irréductible, il existe au moins un point z tel que $f^q(z) = T^p(z)$. Un tel point se projette sur un point périodique de f de période q . Par conséquent, F a une infinité de points périodiques.*

Démonstration. L'application $g = T^{-p} \circ f^q$ est un relèvement de F^q et les hypothèses impliquent que le couple (F^q, g) vérifie les hypothèses du théorème de Poincaré-Birkhoff. Ainsi, g a au moins deux points fixes. Si z est un tel point fixe, il se projette en un point fixe \hat{z} de F^q . La période q' de \hat{z} est un diviseur de q , montrons que c'est q . Il existe $p' \in \mathbf{Z}$ tel que $f^{q'}(z) = T^{p'}(z)$. On a donc $f^q(z) = T^{rp'}(z)$, où $q = q'r$. Puisque p et q sont premiers entre-eux, on en déduit que $r = 1$.

En fait, à chaque ρ sont associées au moins deux orbites périodiques de F (mais ce n'est une conséquence directe du théorème de Poincaré-Birkhoff que dans le cas où $q = 1$). \square

Terminons cette section par expliquer un des cas simples étudiés par Poincaré. Supposons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'application $y \mapsto p_1 \circ f(x, y)$ est strictement croissante. Sous ces conditions, remarquons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe un unique point $y = \psi(x) \in]0, 1[$ tel que $p_1 \circ f(x, y) = x$. Tout point $z = (x, \psi(x))$ est envoyé par f sur un point $(x, \psi'(x))$: l'image par f du graphe de ψ est le graphe d'une fonction $\psi' : \mathbf{R} \rightarrow]0, 1[$. L'application ψ est périodique de période 1, et son graphe se projette sur le graphe d'une fonction continue $\Psi : \mathbf{T}^1 \rightarrow]0, 1[$ dont l'image par F est le graphe d'une fonction Ψ' , la projection du graphe de ψ' . Puisque F préserve l'aire, les graphes de Ψ et de Ψ' doivent se rencontrer en au moins deux points. Les points d'intersection sont les points $(x, \Psi(x))$ tels que $\Psi(x) = \Psi'(x)$: ce sont des points fixes de F relevés par des points fixes de f .

Cette propriété, le fait que $y \mapsto p_1 \circ f(x, y)$ est strictement croissante, est appelée la propriété de *déviaton à droite de la verticale*. Nous allons principalement nous y intéresser.

§2. Définition des difféomorphismes déviant la verticale, exemples

On dira qu'un difféomorphisme $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de classe C^1 *dévie la verticale à droite* si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, les applications $y \mapsto p_1 \circ f(x, y)$ et $y \mapsto p_1 \circ f^{-1}(x, y)$ sont des difféomorphismes de \mathbf{R} , le premier croissant, le second décroissant. La réciproque de f *dévie la verticale à gauche*.

Si f dévie la verticale à droite, on peut définir deux fonctions g, g' de classe C^1 *associées* à f , telles que

$$f(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} y = g(x, x'), \\ y' = g'(x, x'). \end{cases}$$

Le réel $g(x, x')$ est l'ordonnée du point d'intersection de $f^{-1}(\{x'\} \times \mathbf{R})$ et de la verticale $\{x\} \times \mathbf{R}$, le réel $g'(x, x')$ l'ordonnée du point d'intersection de $f(\{x\} \times \mathbf{R})$ et de la verticale $\{x'\} \times \mathbf{R}$. Remarquons que

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x, x') > 0 \quad , \quad \frac{\partial g'}{\partial x}(x, x') < 0 \quad .$$

Si f dévie la verticale à gauche, on peut définir de façon similaire les applications associées, elles vérifient les inégalités inverses.

Si f dévie la verticale, le couple (x, x') définit un système global de coordonnées dans le plan. Ceci est particulièrement intéressant dans le cas où f préserve la forme $dx \wedge dy$. En effet la forme $\alpha = g'dx' - gdx$ est alors fermée et donc exacte : il existe une fonction $h : (x, x') \mapsto h(x, x')$ de classe C^2 telle que

$$g(x, x') = -\frac{\partial h}{\partial x}(x, x') \quad , \quad g'(x, x') = \frac{\partial h}{\partial x'}(x, x') \quad ,$$

et on a

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x'}(x, x') < 0 \quad .$$

Une telle fonction, définie à une constante additive près, est une *fonction génératrice*.

Si f dévie la verticale à droite et commute avec la translation

$$T : (x, y) \mapsto (x + 1, y) \quad ,$$

c'est-à-dire si f relève un difféomorphisme F de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ homotope à l'identité, les fonctions g et g' doivent vérifier

$$\begin{cases} g(x + 1, x' + 1) & = g(x, x') \\ g'(x + 1, x' + 1) & = g'(x, x') \end{cases} \quad .$$

Tout autre relèvement de F dévie également la verticale à droite et on dit que F elle-même a cette propriété. On peut définir de façon analogue un difféomorphisme déviant la verticale sur un sous anneau de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$. Par exemple, pour un difféomorphisme de l'anneau compact $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$, cette propriété de déviation est caractérisée par l'existence d'un angle $\beta \in]0, \pi/2[$ tel que pour tout $z \in \mathbf{T}^1 \times [0, 1]$, on ait

$$\begin{aligned} \langle v, DF(z).v \rangle &\in [-\pi + \beta, -\beta], \\ \langle v, DF(z)^{-1}.v \rangle &\in [\beta, \pi - \beta], \end{aligned}$$

où $v = (0, 1)$ est le vecteur vertical. Dans ce cas, si $f : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \times [0, 1]$ est un relèvement de F , les fonctions g et g' sont définies sur

$$\begin{aligned} K &= \{(x, x') \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq g(x, x') \leq 1\} \\ &= \{(x, x') \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq g'(x, x') \leq 1\} \\ &= \{(x, x') \in \mathbf{R}^2 \mid a(x) \leq x' \leq b(x)\} \quad , \end{aligned}$$

où

$$a(x) = p_1 \circ f(x, 0) \quad , \quad b(x) = p_1 \circ f(x, 1).$$

Soit F un difféomorphisme de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ qui préserve la forme $dx \wedge dy$. Ceci signifie que la forme $F^*(y dx) - y dx$ est fermée. Dans le cas où cette forme est exacte, on dit que F est *exact-symplectique* : l'aire algébrique délimitée par une courbe fermée simple non homotope à zéro et son image, est nulle. Par exemple, la translation $F : (x, y) \mapsto (x, y + r)$ est exacte-symplectique si et seulement si $r = 0$ puisque $F^*(y dx) - y dx = r dx$. Si de plus, F dévie la verticale à droite et f relève F , la fonction génératrice h vérifie

$$h(x + 1, x' + 1) = h(x, x').$$

En effet, h est une primitive de $f^*(y dx) - y dx$. Le difféomorphisme F est exact-symplectique si et seulement si $F^*(y dx) - y dx$ a une primitive, c'est-à-dire si h relève une application définie sur $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$. Dans le système de coordonnées (x, x') cette condition s'écrit $h(x + 1, x' + 1) = h(x, x')$.

Nous allons donner quelques exemples

2.1 Un exemple explicite

Soit $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe C^k , $k \geq 1$, périodique de période 1. Fixons $\lambda \in (0, 1)$ et considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, \lambda y + \varphi(x + y)). \end{aligned}$$

C'est un difféomorphisme de classe C^k dont la réciproque s'écrit

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + \lambda^{-1}(y - \varphi(x)), \lambda^{-1}(y - \varphi(x))). \end{aligned}$$

Remarquons que f dévie la verticale à droite et relève un difféomorphisme F of $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$. Les applications associées sont

$$\begin{aligned} g : (x, x') &\mapsto x' - x \\ g' : (x, x') &\mapsto \lambda(x' - x) + \varphi(x'). \end{aligned}$$

Remarquons que la matrice jacobienne $Df(x, y)$ vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi'(x + y) & \lambda + \varphi'(x + y) \end{pmatrix},$$

et donc que le jacobien est λ . En particulier, si $\lambda = 1$, le difféomorphisme f préserve $dx \wedge dy$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} g : (x, x') &\mapsto x' - x \\ g' : (x, x') &\mapsto x' - x + \varphi(x'). \end{aligned}$$

et on en déduit que les fonctions génératrices sont les fonctions

$$h : (x, x') \mapsto \frac{1}{2}(x' - x)^2 + \Phi(x')$$

où Φ est une primitive de φ . En particulier, F est exact-symplectique si et seulement si les primitives de φ sont périodiques de période 1, c'est-à-dire si $\int_0^1 \varphi(x) dx = 0$. C'est le cas, par exemple, si $\varphi(x) = \sin 2\pi x$. Dans ce cas l'application est appelée *application standard*.

2.2 Dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique

Le problème de recherche d'une *forme normale* en systèmes dynamiques est le suivant : on a un point fixe d'un difféomorphisme ou une singularité d'un champ de vecteurs et on cherche un système de coordonnées dans lequel l'expression du difféomorphisme ou du champ de vecteurs est le plus simple possible. Nous allons donner ici un exemple, du à Birkhoff, en nous restreignant à la dimension deux. On suppose que f est un difféomorphisme défini au voisinage de $0 \in \mathbf{R}^2$, fixant ce point et préservant la forme d'aire $dx \wedge dy$. Le produit des deux valeurs propres étant égal à 1, soit le point fixe est un point-selle, soit les deux valeurs propres sont de module 1 et conjuguées. On peut les noter $\lambda = e^{2i\pi\alpha}$ et $\bar{\lambda} = e^{-2i\pi\alpha}$, on dira alors que le point fixe est *elliptique*. Si on écrit $f(x, y) = (X, Y)$ on obtient pour tout $n \geq 0$, le développement limité

$$\begin{cases} X &= \sum_{i=0}^n P_i(x, y) + o((|x| + |y|)^n) \\ Y &= \sum_{i=0}^n Q_i(x, y) + o((|x| + |y|)^n), \end{cases}$$

où P_i et Q_i sont des polynômes homogènes de degré i . Posant $Z = X + iY$, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, on obtient

$$Z = \sum_{i=0}^n R_i(z, \bar{z}) + o(|z|^n),$$

où R_i est un polynôme complexe homogène de degré i en les coordonnées z, \bar{z} .

THEOREM 2.2.1: *Supposons que $\lambda^n \neq 1$ pour tout $n \in \{1, \dots, q\}$. Il existe alors un difféomorphisme h de classe C^∞ défini au voisinage de 0, fixant ce point et préservant la forme $dx \wedge dy$, tel que :*

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z e^{2i\pi P(z\bar{z})} + o(|z|^{q-1}),$$

où $P(X) = a_1 X + \dots + a_m X^m$ est un polynôme réel m tel que $2m + 1 < q$.

Avant de prouver le théorème, remarquons que l'application

$$z \mapsto \lambda z e^{2i\pi P(z\bar{z})}$$

a l'expression suivante en coordonnées polaires symplectiques $(\theta, R) = (\theta, r^2)$:

$$(\theta, R) \mapsto (\theta + \alpha + a_1 R + \dots + a_m R^m, R).$$

Cette application préserve $d\theta \wedge dR$ et donc également $dx \wedge dy = \frac{1}{2} d\theta \wedge dR$. Elle laisse invariant chaque cercle $R = R_0$ et induit une rotation sur ce cercle. Nous verrons que les coefficients a_i ne dépendent que de f , ce sont les *invariants de Birkhoff*. Si l'un d'entre-eux est non nul, on obtient un difféomorphisme de $\mathbf{T}^1 \times [0, +\infty[$ qui dévie la verticale (excepté sur le bord si $a_1 = 0$). Cette propriété est encore vérifiée pour la "perturbation" $h \circ f \circ h^{-1}$ dans un voisinage de $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$.

Démonstration du théorème. Notons $Q \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ le plus entier tel que $\lambda^Q = 1$. Nous allons faire une récurrence sur $q < Q$. Puisque $f(z) = \lambda z + o(|z|)$, le théorème est vrai pour $q = 2$. Supposons-le vrai au rang $q - 1$ et prouvons-le au rang q . Quitte à conjuguer f , on peut supposer que $f(z) = \lambda f_0(z) + o(|z|^{q-2})$, où $f_0(z) = z e^{2i\pi Q(z\bar{z})}$ et Q un polynôme réel tel que $2\deg(Q) + 1 < q - 1$. Soit \mathcal{I} le groupe des germes de difféomorphismes de classe C^∞ en 0 qui fixent ce point. Pour tous germes h, h' , écrivons $h = h' \bmod [z^n]$ si les développements de Taylor coïncident jusqu'à

l'ordre $n - 1$. Remarquons que $h \circ h'' = h' \circ h'' \pmod{[z^n]}$ et $h'' \circ h = h'' \circ h' \pmod{[z^n]}$ pour tout $h'' \in \mathcal{I}$. Par conséquent, on a $h' \circ h^{-1} = \text{Id} \pmod{[z^n]}$. Remarquons que

$$f \circ f_0^{-1}(z) = \lambda z + R(z, \bar{z}) + o(|z|^{q-1}),$$

où R est un polynôme homogène de degré $q - 1$ en les coordonnées z, \bar{z} .

LEMME 2.2.2: *Il existe un polynôme $S(z, \bar{z})$, homogène de degré $q - 1$ tel que*

$$h^* \circ f \circ f_0^{-1} \circ h^{*-1}(z) = \begin{cases} \lambda z \pmod{[z^q]} & \text{si } q \text{ est impair} \\ \lambda z + Az^{n+1}\bar{z}^n \pmod{[z^q]} & \text{si } q = 2n + 2 \text{ est pair,} \end{cases}$$

où $h^*(z) = z + S(z, \bar{z})$.

Démonstration. Si

$$h^*(z) = z + S(z, \bar{z}) \pmod{[z^q]},$$

alors

$$h^{*-1}(z) = z - S(z, \bar{z}) \pmod{[z^q]}.$$

Ceci implique que

$$f \circ f_0^{-1} \circ h^{*-1}(z) = \lambda z - \lambda S(z, \bar{z}) + R(z, \bar{z}) \pmod{[z^q]}$$

et

$$\begin{aligned} h^* \circ f \circ f_0^{-1} \circ h^{*-1}(z) &= \lambda z - \lambda S(z, \bar{z}) + R(z, \bar{z}) + S(\lambda z, \lambda \bar{z}) \pmod{[z^q]} \\ &= \lambda z + T(z, \bar{z}) \pmod{[z^q]}. \end{aligned}$$

Si on écrit

$$R(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=q-1} a_{i,j} z^i \bar{z}^j, \quad S(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=q-1} b_{i,j} z^i \bar{z}^j,$$

on obtient

$$T(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=q-1} (a_{i,j} + b_{i,j} \lambda (-1 + \lambda^{i-j-1})) z^i \bar{z}^j.$$

L'entier $i - j - 1 = 2i - q$ prend ses valeurs entre $-q$ et $q - 2$. Par hypothèse, le coefficient de b_{ij} ne s'annule jamais dans le cas où q est impair, et ne s'annule que si $i = q/2$ et $j = q/2 - 1$ dans le cas où q est pair. On peut donc trouver un polynôme S qui vérifie la conclusion du lemme. \square

Remarquons que S est uniquement défini dans le cas où q est impair et que l'un des coefficients peut être choisi arbitraire dans le cas où q est pair. Dans ce cas, A est uniquement défini.

LEMME 2.2.3: *On a*

$$h^* \circ f \circ h^{*-1}(z) = \lambda z e^{2i\pi P(z\bar{z})} \pmod{[z^q]},$$

où

$$P(X) = \begin{cases} Q(X) & \text{si } q \text{ est impair} \\ Q(X) + \frac{1}{2i\pi\lambda} AX^n & \text{si } q = 2n + 2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

Démonstration. On va étudier le cas où q est pair, l'autre cas se traitant de façon analogue. Remarquons que

$$\begin{aligned} f_0 \circ h^*(z) &= z e^{2i\pi Q(z\bar{z})} + S(z, \bar{z}) \pmod{[z^q]} \\ &= h^* \circ f_0(z) \pmod{[z^q]} \end{aligned} \quad ,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} h^* \circ f \circ h^{*-1} \circ f_0^{-1}(z) &= h^* \circ f \circ f_0^{-1} \circ h^{*-1}(z) \pmod{[z^q]} \\ &= \lambda z + Az^{n+1}\bar{z}^n \pmod{[z^q]} \\ &= \lambda z e^{2i\pi A'(z\bar{z})^n} \pmod{[z^q]}, \end{aligned}$$

où $A' = \frac{1}{2i\pi\lambda}A$.

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} h^* \circ f \circ h^{*-1}(z) &= \lambda z e^{2i\pi Q(z\bar{z})} e^{2i\pi A'(f_0(z)\overline{f_0(z)})^n} \pmod{[z^q]}, \\ &= \lambda z e^{2i\pi Q(z\bar{z})} e^{2i\pi A'(z\bar{z})^n} \pmod{[z^q]}. \end{aligned}$$

□

Le théorème se déduira alors du dernier lemme :

LEMME 2.2.4: *Dans le cas où q est impair, il existe $h \in \mathcal{I}$ préservant $dx \wedge dy$ tel que $h = h^* \pmod{[z^n]}$. Dans le cas où q est pair, A' est réel. De plus, si le coefficient $b_{n+1,n}$ de S est choisi imaginaire pur, alors il existe $h \in \mathcal{I}$ préservant $dx \wedge dy$ tel que $h = h^* \pmod{[z^n]}$.*

Démonstration. Ici également, on n'étudie que le cas où q est pair. Le développement limité de

$$z \mapsto \lambda^{-1} f \circ f_0^{-1}(z)$$

est

$$\begin{cases} X &= x + U(x, y) + o((|x| + |y|)^{q-1}) \\ Y &= y + V(x, y) + o((|x| + |y|)^{q-1}) \end{cases},$$

où U et V sont des polynômes homogènes de degré $q-1$. Mais cette application préserve $dx \wedge dy$, puisque c'est le cas de f et f_0 et puisque $|\lambda| = 1$. Si on regarde le terme de plus bas degré dans le développement de $1 = \det Df(x, y)$, on obtient

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Puisque

$$\frac{1}{\lambda} R(z, \bar{z}) = U(x, y) + iV(x, y)$$

on trouve

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + i \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right).$$

Ceci implique que le polynôme à gauche prend des valeurs imaginaires pures sur tout couple (z, \bar{z}) . Ainsi, on a

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{z}} = 0,$$

ce qui signifie

$$\sum_{i+j=q-1} i \frac{a_{i,j}}{\lambda} z^{i-1} \bar{z}^j + i \frac{\bar{a}_{i,j}}{\bar{\lambda}} \bar{z}^{i-1} z^j = 0$$

ou, de façon équivalente, que

$$(i+1) \frac{a_{i+1,j}}{\lambda} + (j+1) \frac{\bar{a}_{j+1,i}}{\bar{\lambda}} = 0 \text{ if } i+j = q-2.$$

De cette dernière égalité, on en déduit que $\frac{A}{\lambda} = \frac{a_{n+1,n}}{\lambda}$ est imaginaire pur et donc que A' est réel. De plus, si $(i, j) \neq (n+1, n)$, on a

$$b_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\lambda(1 - \lambda^{i-j-1})}$$

ce qui implique que

$$(i+1)b_{i+1,j} + (j+1)\bar{b}_{j+1,i} = 0 \text{ si } i+j = q-2 \text{ et } i \neq j.$$

Si $b_{n+1,n}$ est imaginaire pur, cette dernière égalité est encore vraie pour $i = j$, ce qui signifie que

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial V^*}{\partial y} = 0,$$

où

$$\begin{cases} X &= x + U^*(x, y) \\ Y &= y + V^*(x, y) \end{cases}.$$

est l'expression réelle de h^* .

Pour construire $h \in \mathcal{I}$ préservant $dx \wedge dy$ et égal à h^* modulo $[z^q]$, considérons le germe $(x, Y) \mapsto (X, y)$ défini par

$$\begin{cases} X &= x + U^*(x, Y) \\ y &= Y - V^*(x, Y) \end{cases}.$$

On peut résoudre localement (X, Y) fonction de (x, y) et on obtient

$$\begin{cases} X &= x + U^*(x, y) + o((|x| + |y|)^{q-1}) \\ Y &= y + V^*(x, y) + o((|x| + |y|)^{q-1}) \end{cases}.$$

Remarquons maintenant que

$$dX \wedge dY - dx \wedge dy = \left(1 + \frac{\partial U^*}{\partial x}(x, Y) - 1 + \frac{\partial V^*}{\partial Y}(x, Y)\right) dx \wedge dY = 0.$$

Ceci signifie que $h : (x, y) \mapsto (X, Y)$ préserve $dx \wedge dy$. □.

Si λ n'est pas racine de l'unité, on peut appliquer le théorème à tout ordre. La preuve est purement formelle et on obtient une série formelle $h(z, \bar{z}) = z + \sum_{i \geq 2} S_i(z, \bar{z})$ "préservant" $dx \wedge dy$

et une série formelle $P(X) = \sum_{i \geq 1} a_i X^i$ telle que $h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z e^{2i\pi P(z\bar{z})}$. Généralement, ni

la première ni la seconde série converge, même si f est analytique : la dynamique de f est bien plus riche que celle de sa forme normale.

2.3 Le billard convexe

On considère une courbe simple convexe Γ , de classe C^k , $k \geq 2$. On veut décrire la dynamique d'une particule dans le domaine délimité par Γ soumise à aucune force extérieure et rebondissant de façon élastique sur le bord. Les orbites sont constituées de lignes brisées avec des changements de direction sur le bord vérifiant la propriété d'égalité de l'angle d'incidence et de l'angle de réflexion. Ce sont les orbites du flot géodésique d'une surface à bord, cas limite d'un flot géodésique sur une surface sans bord de \mathbf{R}^3 . Il y a une section globale naturelle formée des points d'intersection avec le bord. Ainsi, la dynamique peut être décrite par un système

dynamique sur l'anneau $\mathbf{T}^1 \times [0, \pi]$ que l'on va maintenant expliquer. Nous supposons, pour faciliter les choses, que Γ est de longueur 1. On peut donc choisir un paramétrage par longueur d'arc

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbf{T}^1 &\rightarrow \Gamma \\ s &\mapsto \gamma(s) \end{aligned}$$

Fixons $s \in \mathbf{T}^1$ et $\theta \in]0, \pi[$ puis considérons la ligne Δ passant par $\gamma(s)$ et dirigée par le vecteur v tel que $\langle \gamma'(s), v \rangle = \theta$. Cette droite recoupe Γ en un point $\gamma(s')$, $s' \neq s$, et l'angle $\theta' = \langle v, \gamma'(s') \rangle$ appartient à $]0, \pi[$. La droite Δ' passant par $\gamma(s')$ et dirigée par le vecteur v' tel que $\langle \gamma'(s'), v' \rangle = \theta'$ est la droite obtenue à partir de Δ par réflexion sur la courbe au point $\gamma(s')$. Ainsi la dynamique du billard est décrite par celle de de $F : (s, \theta) \mapsto (s', \theta')$. Remarquons que F peut être prolongé en un homéomorphisme (de même nom) de $\mathbf{T}^1 \times [0, \pi]$ qui fixe tout point de $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ et de $\mathbf{T}^1 \times \{1\}$, et que la restriction à $\mathbf{T}^1 \times]0, \pi[$ est un difféomorphisme de classe C^{k-1} . En effet, notons $\delta = \{(s, s), s \in \mathbf{T}^1\}$ la diagonale de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1$ et considérons les deux applications

$$\begin{aligned} G : (\mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1) \setminus \delta &\rightarrow \mathbf{T}^1 \times]0, \pi[\\ (s, s') &\mapsto (s, \theta(s, s')) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G' : (\mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1) \setminus \delta &\rightarrow \mathbf{T}^1 \times]0, \pi[\\ (s, s') &\mapsto (s', \theta'(s, s')) \end{aligned}$$

où

$$\theta(s, s') = \langle \gamma'(s), \gamma(s') - \gamma(s) \rangle \text{ et } \theta'(s, s') = \langle \gamma'(s') - \gamma(s), \gamma'(s') \rangle.$$

Ces applications, qui sont de classe C^{k-1} , sont des difféomorphismes puisque

$$\frac{\partial \theta}{\partial s'}(s, s') = \frac{\sin \theta'(s, s')}{\|\gamma(s') - \gamma(s)\|} > 0,$$

et

$$\frac{\partial \theta'}{\partial s}(s, s') = -\frac{\sin \theta'(s, s')}{\|\gamma(s') - \gamma(s)\|} < 0.$$

Ils se prolongent en des difféomorphismes de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1$ sur $\mathbf{T}^1 \times (\mathbf{R}/0 \sim \pi) \sim \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$. Ceci implique que $F = G' \circ G^{-1}$ est un difféomorphisme déviant la verticale à droite de $\mathbf{T}^1 \times]0, \pi[$ qui s'étend en un homéomorphisme de $\mathbf{T}^1 \times [0, \pi]$. On peut remarquer que si la fonction courbure $s \mapsto \rho(s)$ ne s'annule pas, alors F est un difféomorphisme de classe C^{k-1} de $\mathbf{T}^1 \times [0, \pi]$ car

$$\frac{\partial \theta}{\partial s'}(s, s) = -\frac{\partial \theta'}{\partial s}(s, s) = \frac{\rho(s)}{2}.$$

Nous allons montrer maintenant la caractère conservatif de F en exhibant une fonction génératrice. L'application

$$\begin{aligned} l : \mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1 &\rightarrow \mathbf{R} \\ (s, s') &\mapsto \|\gamma(s') - \gamma(s)\| \end{aligned}$$

est différentiable hors de δ et on a

$$dl = \cos \theta'(s, s') ds' - \cos \theta(s, s') ds.$$

De la relation $ddl = 0$, on déduit que F préserve la forme d'aire $\sin \theta ds \wedge d\theta$.

L'application

$$H : \mathbf{T}^1 \times [0, \pi] \rightarrow \mathbf{T}^1 \times [-1, 1]$$

$$(s, \theta) \mapsto (s, t) = (s, -\cos \theta)$$

conjugue F à un homéomorphisme F^* de $\mathbf{T}^1 \times [-1, 1]$ qui est un difféomorphisme déviant la verticale à droite de $\mathbf{T}^1 \times]-1, 1[$ et qui préserve la forme d'aire $ds \wedge dt$ (cependant ce n'est pas un difféomorphisme sur l'anneau compact même si la courbure ne s'annule pas).

4. Difféomorphismes déviant la verticale et calcul des variations

Commençons par une observation due à J. Moser. Si F est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ déviant la verticale à droite et préservant la forme $dx \wedge dy$ et si $f : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \times [0, 1]$ est un relèvement de F , alors il existe une fonction $H : [0, 1] \times \mathbf{T}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ vérifiant

$$H(t+1, x, y) = H(t, x, y),$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, 0) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, x, 1) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(t, x, y) > 0,$$

telle que si l'on note $\varphi_t(x, y)$ la valeur au temps t de la solution de l'équation différentielle

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}(t, x, y), \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, y)$$

qui a comme valeur initiale (x, y) au temps $t = 0$, alors on a $\varphi_1 = F$ et l'isotopie $(\varphi_t)_{t \in [0, 1]}$ est relevée au revêtement universel en une isotopie de $\mathbf{R} \times [0, 1]$ qui joint l'identité à f . Il existe des difféomorphismes de l'anneau qui vérifient également cette propriété et qui ne dévient pas nécessairement la verticale (c'est le cas par exemple des itérés d'un difféomorphisme déviant la verticale à droite). Tout ce qu'on verra dans la suite se généralise à ces difféomorphismes. Certains des résultats se généraliseront également en dimension supérieure mais il faudra alors prendre ce point de vue de dynamique hamiltonienne (Mather, Mañé, Fathi, . . .). Il s'agit d'un domaine de recherche très actif. Plus précisément, si on utilise une transformée de Legendre, au système hamiltonien décrit plus haut correspond les équations d'Euler du problème variationnel

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t)) dt$$

où L est la fonction

$$L(t, x, \eta) = y\eta - H(t, x, y),$$

les réels η et y étant liés par l'équation

$$\eta = H_y(t, x, y).$$

La fonction L est bien définie sur un ensemble de la forme

$$\{(t, x, \eta) \mid a(t, x) \leq \eta \leq b(t, x)\}$$

car

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(t, x, y) > 0.$$

Le cadre usuel en dimension supérieure est le suivant. On considère une variété riemannienne compacte connexe M et une fonction réelle L de classe C^2 définie sur $\mathbf{T}^1 \times TM$, où TM est le fibré tangent de M (en d'autres termes un lagrangien périodique en temps) vérifiant les conditions suivantes :

i) pour tout $m \in M$ et tout $\theta \in \mathbf{T}^1$, la restriction de L à $\{\theta\} \times T_m M$ a une matrice hessienne en tout point définie positive ;

ii) on a $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \frac{L(\theta, v)}{\|v\|} = +\infty$ uniformément en θ .

Le caractère défini positif et la croissance super-linéaire permettent alors de dire que la transformée de Legendre

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbf{T}^1 \times TM &\rightarrow \mathbf{T}^1 \times T^*M \\ (\theta, v) &\mapsto (\theta, d_v(L|_{T_m M})), \end{aligned}$$

où $v \in T_m M$, est un difféomorphisme de classe C^{r-1} qui commute avec la projection sur $\mathbf{T}^1 \times M$. L'hamiltonien

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathbf{T}^1 \times T^*M &\rightarrow \mathbf{R} \\ (\theta, \xi) &\mapsto \langle \xi, v \rangle - L(\mathcal{L}^{-1}(\theta, \xi)), \end{aligned}$$

où $\xi \in T_m^* M$ et où $v \in T_m M$ est la composante de $\mathcal{L}^{-1}(\theta, \xi)$ dans TM , est de classe C^r .

Comme exemple d'un tel système, on peut penser au flot géodésique défini par la fonction $L : (\theta, v) \mapsto \|v\|^2$. Le pendule forcé périodique en est un autre exemple. Soit $P : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2 et de période 1. L'équation

$$x'' + \sin x + P'(t) = 0$$

est équivalente au système hamiltonien

$$x' = y - P(t), \quad y' = -\sin x$$

associé à

$$H : (t, x, y) \mapsto \frac{1}{2}y^2 - yP(t) - \cos x.$$

Le lagrangien associé est

$$L(t, x, \eta) = \eta y \frac{1}{2}y^2 + yP(t) + \cos x$$

où

$$\eta = y - P(t),$$

c'est-à-dire

$$L(t, x, \eta) = \frac{1}{2}(\eta + P(t))^2 + \cos x.$$

§3. Ensembles bien ordonnés

3.1 Définition, propriétés

On suppose ici que F est un difféomorphisme de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ qui dévie la verticale à droite, et que $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ est un relèvement. On note $\pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ la projection de revêtement. Un ensemble bien ordonné X est une partie X invariante par F telle que :

- la première projection $p_1 : X \rightarrow \mathbf{T}^1$ est injective ;
- l'application f préserve naturellement l'ordre défini par la projection $p_1 : \pi^{-1}(X) \rightarrow \mathbf{R}$, i.e.

$$p_1(z) < p_1(z') \Rightarrow p_1(f(z)) < p_1(f(z')) .$$

L'application $p_1|_X \circ F \circ (p_1|_X)^{-1}$ peut alors être prolongée en un homéomorphisme G de \mathbf{T}^1 , par exemple par interpolation linéaire, et il existe alors un unique relèvement $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de G qui coïncide avec $p_1|_{\pi^{-1}(X)} \circ f \circ (p_1|_{\pi^{-1}(X)})^{-1}$ sur $p_1(\pi^{-1}(X))$. La théorie des homéomorphismes du cercle nous dit que l'on peut définir le nombre de rotation réel ρ de g : pour tout $z \in \pi^{-1}(X)$ et tout $k \in \mathbf{Z}$, on a :

$$-1 < p_1 \circ f^k(z) - p_1(z) - k\rho < 1 .$$

On en déduit que ρ ne dépend pas du prolongement G , on le note $\rho(X)$. Par contre, il dépend du relèvement choisi f de F , pour un autre relèvement il faut rajouter un entier. L'exemple le plus naturel est celui de *graphe invariant*, par abus de langage il s'agit du graphe d'une fonction continue $\psi : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{R}$.

Toujours grâce à la théorie des homéomorphismes du cercle, on sait que si $\rho(X)$ est rationnel et s'écrit $\rho(X) = p/q$, où p et q sont premiers entre-eux, alors X contient des orbites périodiques de période q ; on sait également que l'ensemble α -limite de tout point $z \in X$ est une telle orbite, il en est de même de l'ensemble ω -limite. Si par contre, $\rho(X)$ est irrationnel, alors X contient une unique partie fermée minimale qui est, soit un graphe invariant (et dans ce cas il coïncide avec X), soit un ensemble de Cantor.

Il se peut qu'il n'existe aucun ensemble bien ordonné (c'est par exemple le cas si $f(x, y) = (x + y, y + r)$, $r \neq 0$). Cependant, on a :

PROPOSITION 3.1.1: *L'ensemble \mathcal{X} des parties bien ordonnées est fermé pour la topologie de Hausdorff et l'application $X \mapsto \rho(X)$ est continue et propre.*

Démonstration. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite dans \mathcal{X} qui converge vers une partie compacte X pour la topologie de Hausdorff. Ceci signifie que

- pour tout voisinage U de X il existe n_0 tel que $X_n \subset U$ si $n \geq n_0$,
- pour toute partie ouverte U telle que $U \cap X \neq \emptyset$, il existe n_0 tel que $X_n \cap U \neq \emptyset$ si $n \geq n_0$.

Commençons par prouver que p_1 est injective sur X . Supposons que \hat{z} et \hat{z}' sont deux points dans X qui ont même première coordonnée. Choisissons deux relevés respectifs $z = (x, y)$ et $z' = (x, y')$ et supposons que $y' > y$. Puisque f dévie la verticale à droite, on en déduit que

$$p_1 \circ f^{-1}(z') < p_1 \circ f^{-1}(z), \quad p_1 \circ f(z) < p_1 \circ f(z').$$

Puisque la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge vers X , on peut construire deux suites $(\hat{z}_n)_{n \geq 0}$ et $(\hat{z}'_n)_{n \geq 0}$ qui convergent respectivement vers \hat{z} et \hat{z}' et telles que $\hat{z}_n \in X_n$ et $\hat{z}'_n \in X_n$. On peut alors choisir

deux suites relevées $(z_n)_{n \geq 0}$ et $(z'_n)_{n \geq 0}$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} z'_n = z'$. On en déduit que pour n assez grand, on a

$$p_1 \circ f^{-1}(z'_n) < p_1 \circ f^{-1}(z_n), \quad p_1 \circ f(z_n) < p_1 \circ f(z'_n).$$

Or ceci contredit le fait que X_n est bien ordonné. Le même type d'argument permet de prouver que la restriction de f à $\pi^{-1}(X)$ préserve l'ordre induit par p_1 .

Montrons maintenant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(X_n) = \rho(X)$. Fixons $\varepsilon > 0$, puis $k \geq 1$ tel que $3 < k\varepsilon$. Choisissons $z \in \pi^{-1}(X)$. Il existe un voisinage U de z tel que, pour tout $z' \in U$, on a

$$-1 < p_1 \circ f^k(z) - p_1(z) - p_1 \circ f^k(z') + p_1(z') < 1.$$

Si n est assez grand, on peut trouver dans U un point z_n qui se projette dans X_n . Des inégalités

$$\begin{aligned} -1 &< p_1 \circ f^k(z_n) - p_1(z_n) - k\rho(X_n) < 1, \\ -1 &< p_1 \circ f^k(z) - p_1(z) - k\rho(X) < 1, \\ -1 &< p_1 \circ f^k(z) - p_1(z) - p_1 \circ f^k(z_n) + p_1(z') < 1, \end{aligned}$$

on déduit que

$$-3 < k(\rho(X) - \rho(X_n)) < 3,$$

ce qui implique que

$$-\varepsilon < \rho(X) - \rho(X_n) < \varepsilon.$$

Pour finir, prouvons que ρ est propre, c'est-à-dire prouvons que pour tout $M > 0$, l'ensemble $\rho^{-1}([-M, M])$ est compact. Pour tout $X \in \rho^{-1}([-M, M])$ et tout $z \in \pi^{-1}(X)$, on a

$$-1 - M < p_1 \circ f(z) - p_1(z) < M + 1.$$

Puisque $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} p_1 \circ f(x, y) - x = \pm\infty$ et puisque f commute avec $T : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$, on sait que la limite précédente est uniforme en x . Ainsi, il existe $K(M) > 0$ tel que tout ensemble $X \in \rho^{-1}([-M, M])$ est en fait inclus dans $\mathbf{T}^1 \times [-K(M), K(M)]$. L'ensemble des parties compactes de $\mathbf{T}^1 \times [-K(M), K(M)]$ (ou plus généralement de tout ensemble compact métrique) est compact pour la topologie de Hausdorff. On en déduit que $\rho^{-1}([-M, M])$, qui est fermé pour la topologie de Hausdorff puisque ρ est continue, doit être compact. \square

On en déduit immédiatement

COROLLAIRE 3.1.2 : *L'image de \mathcal{X} par l'application ρ est une partie fermée de \mathbf{R} .*

3.2 Existence dans le cas exact-symplectique

Nous allons prouver le résultat suivant.

THÉORÈME 3.2.1 : *Soit F un difféomorphisme de l'anneau $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ déviant la vertical à droite et exact-symplectique. Alors, pour tout $\rho \in \mathbf{R}$, il existe un ensemble bien ordonné X tel que $\rho(X) = \rho$.*

Les preuves originales sont dues indépendamment à S. Aubry et J. Mather et sont variationnelles. Remarquons qu'il suffit de prouver le résultat pour ρ rationnel, grâce à la proposition

2.1.1 et au corollaire 2.1.2 (c'est une remarque de R. Douady et A. Katok). Ce théorème nous permet de comprendre par exemple ce qui se passe, après perturbation, aux courbes invariantes de la forme normale de Birkhoff dans l'étude de la dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique : certaines persistent comme graphes, d'autres prennent la forme plus faible d'un ensemble de Cantor et d'autres subsistent sous forme d'orbite périodique.

Supposons que $\rho = p/q$ et expliquons dans le cas du billard elliptique pourquoi il existe une orbite périodique bien ordonnée de nombre de rotation p/q (l'argument est dû à Birkhoff). Considérons, parmi tous les polygones convexes inscrits dans C un polygone de périmètre maximale. La tangente à C en tout sommet M de P fait le même angle avec les deux côtés de P issus de M (car le périmètre est maximal) et le polygone correspond à une trajectoire du billard. Suivant le sens de parcours, ce polygone correspond en fait à deux orbites périodiques O, O' de l'homéomorphisme $F : \mathbf{T}^1 \times [0, \pi] \rightarrow \mathbf{T}^1 \times [0, \pi]$ associé. Elles sont bien ordonnées et on a $\rho(O) = 1/q$ and $\rho(O') = 1 - 1/q$. Si on veut, par un raisonnement similaire, obtenir une orbite périodique bien ordonnée de nombre de rotation p/q , il faut utiliser des polygones de type étoilé (les polygones à q côtés qui naturellement "font p fois" le tour de C). Le point important à noter est qu'un polygone de périmètre maximal n'est jamais dégénéré, les q sommets sont distincts. Nous verrons que cette preuve se généralise au cadre général grâce à l'utilisation des fonctions génératrices

Démonstration du théorème. Écrivons g, g' pour les applicatiions associées à f et h pour une fonction génératrice. Considérons l'espace affine

$$E = \{(x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mid x_{i+q} = x_i + p\}$$

et la partie

$$S = \{(x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in E \mid i \frac{p}{q} + j \leq i' \frac{p}{q} + j' \Rightarrow x_i + j \leq x_{i'} + j'\}.$$

C'est un ensemble hoéomorphe à $\mathbf{R} \times [0, 1]^{q-1}$ dont l'intérieur est

$$\text{Int}(S) = \{(x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in E \mid i \frac{p}{q} + j < i' \frac{p}{q} + j' \Rightarrow x_i + j < x_{i'} + j'\}.$$

On va prouver l'existence d'une suite $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in \text{Int}(S)$ telle que

$$g'(x_{i-1}, x_i) - g(x_i, x_{i+1}) = 0,$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Si on pose $y_i = g(x_i, x_{i+1})$ on aura

$$f(x_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1}),$$

ce qui prouvera que la suite $(x_i, y_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ est une orbite de f qui se projette en une orbite périodique de période q bien ordonnée (car $\mathbf{x} \in \text{Int}(S)$) dont le nombre de rotation est p/q .

Définissons la fonction

$$H : S \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto \sum_{i=0}^{q-1} h(x_i, x_{i+1}).$$

Elle est de classe C^2 et vérifie

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_i} &= \frac{\partial h}{\partial x'}(x_{i-1}, x_i) + \frac{\partial h}{\partial x}(x_i, x_{i+1}) \\ &= g'(x_{i-1}, x_i) - g(x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

Le théorème est donc une conséquence du résultat suivant :

LEMME 3.2.2: *La fonction H admet un minimum dans S et ce minimum n'est pas atteint sur un point de la frontière.*

Proof. L'application H a un minimum sur l'ensemble compact

$$\{(x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in S \mid 0 \leq x_0 \leq 1\}$$

Puisque $h(x+1, x'+1) = h(x, x')$ (rappelons que F est exact-symplectique), on a $H = H \circ \tau$, où

$$\begin{aligned} \tau &: E \rightarrow E \\ \mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} &\mapsto (x_i + 1)_{i \in \mathbf{Z}} \end{aligned}$$

Ceci implique que H a un minimum sur S .

Fixons maintenant $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in \text{Fr}(S)$ et prouvons que $H|_S$ n'atteint pas son minimum en \mathbf{x} . Remarquons que $H = H \circ \sigma$, où

$$\begin{aligned} \sigma &: E \rightarrow E \\ \mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} &\mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbf{Z}} \end{aligned}$$

Fixons i_0 et j_0 tel que $i_0 p + j_0 q = 1$ et définissons pour tout $k \in \mathbf{Z}$ la suite

$$\mathbf{x}^k = (x_i^k)_{i \in \mathbf{Z}} = (x_{i+k i_0} + k j_0)_{i \in \mathbf{Z}} = (\tau^{j_0} \circ \sigma^{i_0})^k(\mathbf{x}).$$

Remarquons que

$$i_0 \frac{p}{q} + j_0 = \frac{1}{q} = \inf\{i \frac{p}{q} + j \mid i \frac{p}{q} + j > 0\}$$

et que la coordonnée x_i^1 est donc la plus petite parmi les coordonnées de la forme $x_{i'} + j'$, $i' \in \mathbf{Z}$, $j' \in \mathbf{Z}$, qui sont plus grandes que x_i . Puisque \mathbf{x} appartient à $\text{Fr}(S)$, il existe $i \in \mathbf{Z}$ tel que $x_i = x_i^1$. Or cette égalité ne peut être vérifiée pour tout $i \in \mathbf{Z}$ puisque $x_i + q = x_{i+p}$. On peut donc choisir i de telle façon que $x_i = x_i^1$ et $x_{i+1} \neq x_{i+1}^1$. Pour les mêmes raisons, on sait qu'il existe $k \leq 0 < l$ tels que

$$x_i^{k-1} < x_i^k = \dots = x_i = \dots = x_i^l < x_i^{l+1}.$$

Des inégalités

$$x_{i-1}^k \leq x_{i-1}^l, \quad x_{i+1}^k \leq x_{i+1} < x_{i+1}^1 \leq x_{i+1}^l$$

et de la condition

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x'}(x, x') < 0,$$

conséquence du fait que f dévie la verticale à droite, on en déduit que

$$\frac{\partial h}{\partial x'}(x_{i-1}^k, x_i^k) + \frac{\partial h}{\partial x}(x_i^k, x_{i+1}^k) > \frac{\partial h}{\partial x'}(x_{i-1}^l, x_i^l) + \frac{\partial h}{\partial x}(x_i^l, x_{i+1}^l).$$

Il y a donc deux possibilités : soit la quantité à gauche est strictement positive, soit celle à droite est strictement négative. Dans le premier cas, on peut trouver $\mathbf{x}' \in S$ tel que $H(\mathbf{x}') < H(\mathbf{x}^k) = H(\mathbf{x})$, par une modification de \mathbf{x}^k en diminuant légèrement x_i^k . Dans le second cas, on peut trouver $\mathbf{x}' \in S$ tel que $H(\mathbf{x}') < H(\mathbf{x}^k) = H(\mathbf{x})$, par une modification de \mathbf{x}^k en augmentant légèrement x_i^k . \square

Remarques.

1. Par le principe du col (un argument de type minimax), on peut montrer qu'il existe au moins deux orbites périodiques de nombre de rotation p/q . On peut montrer plus précisément qu'il existe deux orbites périodiques dont l'union est un ensemble bien ordonné de nombre de rotation p/q . On peut également prouver le théorème précédent grâce aux arguments suivants. Considérons la variété affine

$$\tilde{E} = E/\tau \sim \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}^{q-1}.$$

L'application H relève une application $\tilde{H} : \tilde{E} \rightarrow \mathbf{R}$ puisque $H = H \circ \tau$. On peut alors regarder le flot de gradient $(\tilde{\varphi}_t)_t$ défini par la métrique euclidienne standard. On peut alors prouver que

$$\tilde{S} = S/\tau \sim \mathbf{T}^1 \times [0, 1]^{q-1}.$$

est un domaine attractif : pour tout $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}$ et tout $t > 0$, on a $\tilde{\varphi}_t(\tilde{\mathbf{x}}) \in \text{Int}(\tilde{S})$. La compacité de \tilde{S} implique alors que $\tilde{\varphi}_t(\tilde{\mathbf{x}})$ est défini pour tout $t \geq 0$ et que $\tilde{\Sigma} = \bigcap_{t \geq 0} \tilde{\varphi}_t(\tilde{S})$ est une partie compacte incluse dans $\text{Int}(\tilde{S})$ et invariante par le flot. Tout point où $\tilde{H}|_{\tilde{\Sigma}}$ atteint son minimum ou son maximum est un point critique de \tilde{H} et correspond à une orbite périodique bien ordonnée de nombre de rotation p/q . Du fait que l'inclusion $\iota : \tilde{S} \rightarrow \tilde{H}$ induit un isomorphisme sur les premiers groupes d'homologie, on peut déduire que $\tilde{\Sigma}$ ne se réduit pas à un point et contient donc deux points critiques de \tilde{H} .

Pour montrer que l'on peut choisir les deux orbites périodiques de telle façon que la réunion est bien ordonnée, on peut partir d'une suite $\mathbf{x}^0 = (x_i^0)_{i \in \mathbf{Z}} \in S$ où H atteint son minimum. On écrit

$$\tau^{j_0} \circ \sigma^{i_0}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^1 = (x_i^1)_{i \in \mathbf{Z}}$$

et on considère l'ensemble

$$\hat{S} = \{(x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in E \mid x_i^0 \leq x_i \leq x_i^1\},$$

qui, remarquons-le, est inclus dans S . On peut remarquer que S est un domaine (presque) attractif du champ de gradient $(\varphi_t)_t$ de H : pour tout $\mathbf{x} \in \hat{S} \setminus \{\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\}$ et pour tout $t > 0$, on a $\varphi_t(\mathbf{x}) \in \text{Int}(\hat{S})$. L'ensemble $\hat{\Sigma} = \bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(\hat{S})$ est une partie compacte connexe invariante, incluse dans $\text{Int}(\hat{S})$, qui contient \mathbf{x}^0 et \mathbf{x}^1 . Le minimum de $H|_{\hat{\Sigma}}$ est atteint en \mathbf{x}^0 et \mathbf{x}^1 , le maximum sera atteint en un point \mathbf{x}' distinct de \mathbf{x}^0 and \mathbf{x}^1 . La réunion de l'orbite périodique associée à \mathbf{x}' et de de l'orbite périodique associée à \mathbf{x}^0 est bien ordonnée.

On pourrait également raisonner sur l'espace quotient. Notons $\tilde{\sigma} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$ l'application (périodique) relevée par σ et $\tilde{p}_i : \tilde{E} \rightarrow \mathbf{T}^1$ l'application relevée par la projection

$$p_i : E \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in S \rightarrow x_i.$$

Définissons alors l'ensemble \mathcal{C} formé des courbes simples $C \subset \tilde{S}$, invariantes par $\tilde{\sigma}$, qui se projettent injectivement sur \mathbf{T}^1 par chaque application \tilde{p}_i . On peut montrer alors que le semi-flot $(\tilde{\varphi}_t)_{t > 0}$ induit un semi-flot naturel sur \mathcal{C} et contient donc des courbes fixes (par exemple par un argument de type Shauder-Tychonoff), on peut également montrer que ses courbes fixes sont de classe C^1 . Remarquons qu'elles contiennent au moins $2q$ points critiques de \tilde{H} correspondant à deux orbites périodiques de nombre de rotation p/q dont la réunion est bien ordonnée.

Enfin, dans la théorie d'Aubry, on peut prouver que H est minorée sur E (plus précisément \tilde{H} est propre) et que les points où elle atteint son minimum appartiennent à $\text{Int}(S)$

3.3 Description dans le cas générique

Gardons les hypothèses du paragraphe précédent. Fixons $\rho = p/q$ rationnel et considérons une suite $(\rho_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers ρ , avec $\rho_n > \rho$. Pour tout $n \geq 0$, choisissons un ensemble bien ordonné X_n de nombre de rotation ρ_n . Grâce à la proposition 3.1, on peut supposer que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge vers un ensemble compact X et que cet ensemble est une partie bien ordonnée de nombre de rotation ρ . Puisque

$$p_1 \circ f^q(z) - p_1(z) - p > 0$$

pour tout $z \in \pi^{-1}(X_n)$ et tout $n \geq 0$, on sait que

$$p_1 \circ f^q(z) - p_1(z) - p \geq 0$$

pour tout $z \in \pi^{-1}(X)$. La dynamique de F sur X étant celle d'un homéomorphisme du cercle de nombre de rotation p/q restreinte à un ensemble invariant, on en déduit que l'ensemble $X^* \subset X$ des points périodiques de période q est non vide et que pour tout $z'' \in X \setminus X^*$, on a

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} F^k(z'') = z \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} F^k(z'') = z'$$

où z (resp. z') est le point de X^* le plus proche de z à gauche (resp. à droite) de ce point.

PROPOSITION 3.3.1: *Entre deux points de X^* , il existe toujours d'autres points de X . Plus précisément, toute composante connexe de $\mathbf{T}^1 \setminus p_1(X^*)$ contient des points de $p_1(X)$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une composante connexe I de $\mathbf{T}^1 \setminus p_1(X^*)$ qui ne rencontre pas $p_1(X)$. Fixons un relèvement $\tilde{I} \subset \mathbf{R}$. C'est une composante connexe de $\mathbf{R} \setminus p_1(\pi^{-1}(X))$. L'ensemble $X' \subset \pi^{-1}(X)$ des points qui se projettent sur \mathbf{R} entre \tilde{I} et $T(\tilde{I})$ est compact et vérifie l'égalité $f^q(X') = T^p(X')$. Il existe donc un voisinage \tilde{U} de X' qui se projette injectivement sur $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$ en un voisinage U de X et tel que $f^q(\tilde{U}) \cap T^r(\tilde{U}) \Rightarrow r = p$. Si n est assez grand, on aura $X_n \subset U$ et $\pi^{-1}(X_n) \subset \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} T^k(\tilde{U})$. Fixons maintenant $z \in \pi^{-1}(X_n) \cap \tilde{U}$. On doit avoir $f^q(z) \in T^p(\tilde{U})$ et donc $f^{qk}(z) \in T^{pk}(\tilde{U})$, pour tout $k \geq 0$. Or ceci implique que $\rho(X_n) = p/q$ en contradiction avec l'hypothèse $\rho(X_n) > p/q$. \square

PROPOSITION 3.3.2: *Pour tout $\tilde{z} \in X^*$, l'application $Df^q(\tilde{z})$ a une valeur propre positive.*

Démonstration. Fixons un relèvement $z \in \mathbf{R}^2$ de \tilde{z} et considérons l'ensemble $E(z)$ des vecteurs unitaires w tels qu'il existe une suite $(z_n)_{n \geq 0} \in \pi^{-1}(X)$ convergeant vers z , avec

$$p_1(z_n) > p_1(z) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_n - z}{\|z_n - z\|} = w.$$

La proposition précédente nous dit que cet ensemble n'est pas vide. Il est clair que $E(T(z)) = E(z)$ et que

$$w \in E(z) \Leftrightarrow \frac{Df(z).w}{\|Df(z).w\|} \in E(f(z)).$$

En particulier, on a

$$w \in E(z) \Leftrightarrow \frac{Df^q(z).w}{\|Df^q(z).w\|} \in E(z).$$

L'ensemble $E(z)$ est fermé et naturellement ordonné par la seconde projection. Le plus "grand" (et également le plus "petit" si $E(z)$ n'est pas réduit à un point) vecteur est un vecteur propre associé à une valeur propre positive. \square

Supposons maintenant que F vérifie les propriétés suivantes (ces propriétés sont génériques au sens où elles sont vraies sur une intersection dénombrable de parties ouvertes denses de l'ensemble des difféomorphismes déviant la verticale à droite et exact-symplectiques, muni de la topologie suivante : une suite $(F_n)_{n \geq 0}$ converge vers F si elle converge uniformément sur tout compact vers F et si on a la même propriété pour les dérivées jusqu'à l'ordre k):

- i) si z est un point périodique de F de période q , alors 1 n'est pas une valeur propre de $Df^q(z)$;
- ii) si z et z' sont deux points périodiques de type selle, alors les variétés stables et instables $W^s(z)$ et $W^u(z')$ s'intersectent transversalement (ceci signifie que pour tout point $z'' \in W^u(z) \cap W^s(z')$ les tangentes à $W^u(z)$ et à $W^s(z')$ en z'' sont distinctes z'' , c'est donc vrai si $W^u(z) \cap W^s(z') = \emptyset$).

Revenons sur l'ensemble X construit plus haut. Il contient un nombre fini de points périodiques de période q puisque dans le cas contraire, l'ensemble des points périodiques admettrait un point d'accumulation z et que la condition **i**) serait violée en ce point. Tout point périodique $z \in X$ est de type selle puisqu'il a une valeur propre réelle (et que le produit des deux valeurs propres est égal à 1). Si z et z' sont deux points périodiques consécutifs (z à gauche de z'), il existe un point $z'' \in X$ entre z et z' tel que

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} F^k(z'') = z \text{ and } \lim_{k \rightarrow +\infty} F^k(z'') = z',$$

(c'est le contenu de la proposition 3.3.1). Ceci implique que $W^u(z) \cap W^s(z') \neq \emptyset$. On peut alors prouver, grâce à **i**) et à **ii**) que $W^u(z)$ se rencontrent en un point autre que z . On a une intersection homocline, en particulier l'entropie topologique de F est positive.

3.4 Courbes invariantes, régions d'instabilité

Parmi les parties bien ordonnées, on trouve les courbes invariantes dont l'ensemble \mathcal{C} forme d'ailleurs une partie fermée de \mathcal{X} . En particulier, on a :

PROPOSITION 3.4.1: *L'ensemble \mathcal{C} des courbes invariantes d'un difféomorphisme déviant la verticale à droite est fermé pour la topologie de Hausdorff et l'application $X \mapsto \rho(X)$ est continue et propre. En particulier, l'image de \mathcal{C} par l'application ρ est une partie fermée de \mathbf{R} .*

Énonçons un certain nombre de propriétés sur les graphes invariants : Les propriétés suivantes se prouvent facilement.

- 1) Si C et C' sont deux graphes invariants et si C' est au dessus de C , alors $\rho(C) \geq \rho(C')$. Plus généralement si X est un ensemble bien ordonné au dessus de C (resp. en dessous de C), alors $\rho(X) \geq \rho(C)$ (resp. $\rho(X) \leq \rho(C)$).
- 2) Si C et C' sont deux graphes invariants disjoints et si $\rho(C) = \rho(C')$, alors le nombre de rotation commun est rationnel. De plus une telle situation est impossible si F préserve la mesure de Lebesgue.
- 3) Si C et C' sont deux graphes invariants distincts mais qui se rencontrent, alors $\rho(C) = \rho(C')$. De plus, si F préserve la mesure de Lebesgue, alors le nombre de rotation commun est rationnel.
- 4) La réunion des courbes invariantes est une partie fermée.

Si on suppose de plus que F est un difféomorphisme exact symplectique générique (qui vérifie les conditions **i**) et **ii**) vues plus haut, alors on a également la condition suivante.

5) Il n'existe aucun graphe de nombre de rotation rationnel.

Puisqu'il y a au plus un graphe de nombre de rotation irrationnel, on en déduit que ρ est un homéomorphisme entre \mathcal{C} et une partie fermée incluse dans $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Toute composante connexe de la réunion des courbes invariantes est homéomorphe à $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$, sa frontière est formée de $r \leq 2$ courbes invariantes. Une telle composante s'appelle une *région annulaire d'instabilité*. Les ensembles bien ordonnés de nombre irrationnel contenus dans une région d'instabilité sont des ensembles de Cantor, appelés usuellement *ensembles d'Aubry-Mather*.

Ce qui précède ne dit rien sur l'existence de courbes invariantes. C'est la théorie KAM, fondée par A. Kolmogorov et V. Arnold dans le cas analytique, et par J. Moser dans le cas différentiable, qui permet d'obtenir de telles courbes. Il y a beaucoup d'aspects dans cette théorie. Rappelons qu'un nombre irrationnel ρ est *diophantien* s'il existe $C > 0$ et $\tau \geq 1$ tels que

$$|qw - p| \geq \frac{C}{q^\tau},$$

pour tous $p \in \mathbf{Z}$ et $q > 0$. Sinon ρ est un *nombre de Liouville*. L'ensemble des nombres diophantiens a un complémentaire de mesure nulle et l'ensemble des nombres de Liouville est une intersection dénombrable d'ouverts denses. Dans le cas des difféomorphismes déviant la verticale, la théorie KAM nous dit que si un difféomorphisme déviant la verticale a une courbe invariante de nombre de rotation ρ diophantien et si F et C sont de classe C^k (où k dépend de τ), alors tout difféomorphisme proche de f pour la C^k -topologie, admet une courbe invariante de nombre de rotation ρ . En particulier si on perturbe un difféomorphisme de classe C^∞ intégrable, alors il subsiste beaucoup de courbes invariantes. Illustrons par quelques exemples.

Le difféomorphisme F_0 relevé par $f_0 : (x, y) \mapsto (x + y, y)$ est intégrable. Tout nombre réel est le nombre de rotation d'une courbe invariante. Considérons l'application standard F_μ relevée par

$$f_\mu : (x, y) \mapsto (x + y, y + \mu \sin(2\pi(x + y))).$$

Si μ est assez petit, alors l'ensemble $R(\mu) \subset \mathbf{R}$ des nombres de rotation de courbes invariantes de classe C^∞ de F_μ est non vide. Plus précisément, la mesure de Lebesgue de $R(\mu) \cap [0, 1]$ tend vers 1 quand μ tend vers 1.

L'application F_0 , temps 1 du flot défini par l'équation du pendule libre

$$x'' + \sin x = 0$$

est intégrable. Si μ est petit, ici-encore l'ensemble $R(\mu) \subset \mathbf{R}$ des nombres de rotation de courbes invariantes de classe C^∞ de l'application F_μ , temps 1 du flot défini par l'équation du pendule entrevenu

$$x'' + x + \mu \sin(2\pi t).$$

n'est pas vide. Là-encore, la mesure de Lebesgue de $R(\mu) \cap [0, 1]$ tend vers 1 quand μ tend vers 1.

Le billard convexe est intégrable dans le cas où la courbe C est une ellipse. En effet, si C' est une ellipse confocale à C et incluse dans le domaine bordé par C , alors une trajectoire du billard qui est tangente à C' sur un segment reste tangente sur tout segment. La courbe C' est

une *caustique* de C . À C' est associée deux courbes invariantes du système dynamique défini sur $\mathbf{T}^1 \times [0, \pi]$ et tout nombre entre 0 et 1 autre que $1/2$ peut-être défini ainsi. À $1/2$ correspond deux graphes invariants définis par l'ellipse dégénérée formé du segment joignant les deux foyers. La réunion de ces deux courbes est égale à la variété stable (et également à la variété instable) de l'orbite périodique de période 2 correspondant au grand axe de l'ellipse. On peut montrer le résultat suivant (Lazutkin, R Douady) à l'aide de la théorie KAM : si C est assez lisse (en fait de classe C^6) et si la courbure ne s'annule jamais, alors il existe des caustiques proches de C et leur réunion est de mesure positive. On peut mentionner aussi le résultat suivant de Mather qui exprime qu'il n'y aucune courbe invariante (et donc aucune caustique) si la courbure s'annule. Enfin, on ne connaît aucune autre courbe convexe, autre que l'ellipse, pour laquelle tout nombre $\rho \in [0, 1]$ est nombre de rotation d'une courbe invariante.

Considérons maintenant un difféomorphisme f de classe C^∞ admettant un point fixe elliptique en 0 et supposons que les valeurs propres de $Df(0)$ ne sont pas des racines de l'unité d'ordre $q \leq 4$, supposons également que le premier invariant de Birkhoff n'est pas nul. Alors le point 0 est entouré par des courbes invariantes. Plus précisément 0 est un point de densité de la réunion de ces courbes.

§4. Diffusion dans les régions d'instabilité

4.1 Énoncés des résultats

Nous venons de voir que génériquement, un point fixe elliptique d'un difféomorphisme préservant l'aire d'une surface est accumulé par des courbes invariantes, en particulier il est stable au sens de Lyapounov : tout point proche du point fixe a son orbite entière qui reste proche du point fixe. En fait, on a une réciproque, la stabilité implique l'existence de courbes invariantes (si on a une propriété de déviation de la verticale). C'est ce phénomène que nous allons étudier. On se donne un difféomorphisme F de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ déviant la verticale à droite et exact-symplectique et un relèvement f à $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Une région d'instabilité a deux bouts : le bout inférieur que l'on notera $\partial_- U$, le bout supérieur que l'on notera $\partial_+ U$. Les bouts peuvent correspondre à une identification d'une courbe invariante à un point ou à un bout de l'anneau (si U n'est pas bornée). Dans ses travaux sur les régions d'instabilité, Birkhoff a prouvé le résultat suivant :

THÉOREME 4.1.1 : *Si U est une région d'instabilité, alors pour tout voisinage $O_- \subset U$ de $\partial_- U$ et tout voisinage $O_+ \subset U$ de $\partial_+ U$, il existe un point $z \in O_-$ et un entier $n \geq 1$ tel que $F^n(z) \in O_+$.*

La preuve de Birkhoff, purement topologique, est basée sur le résultat suivant

PROPOSITION 4.1.2 : *Si $W \subset \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ est une partie ouverte annulaire invariante essentielle (i.e. l'inclusion $\iota : W \rightarrow \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ induit un isomorphisme entre les premiers groupes d'homologie) et si ∂W est bornée, alors ∂W est une union de $p \leq 2$ graphes invariants.*

Plus tard, à l'aide de méthodes variationnelles, Mather a amélioré le résultat de Birkhoff :

THEOREM 4.1.3 : *Si U est une région d'instabilité, alors il existe un point $z \in U$ tel que $\lim_{k \rightarrow -\infty} F^k(z) = \partial_- U$ and $\lim_{k \rightarrow +\infty} F^k(z) = \partial_+ U$.*

Remarques.

1. Bien évidemment, sous les mêmes hypothèses, il existe $z' \in U$ tel que $\lim_{k \rightarrow -\infty} F^k(z) = \partial_+ U$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} F^k(z) = \partial_- U$. Dans le cas où F n'a aucune courbe invariante, le théorème nous dit qu'il existe un point z tel que $\lim_{k \rightarrow -\infty} p_2 \circ f^k(z) = -\infty$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_2 \circ f^k(z) = +\infty$ et un point z' tel que $\lim_{k \rightarrow -\infty} p_2 \circ f^k(z') = +\infty$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_2 \circ f^k(z') = -\infty$.

2. On peut montrer que l'application standard F_μ relevée par

$$f_\mu : (x, y) \mapsto (x + y, y + \mu \sin(2\pi(x + y)))$$

n'a pas de graphe invariant si $|\mu|$ est assez grand. Rappelons que l'application $F : \mathbf{T}^1 \times [0, \pi] \rightarrow \mathbf{T}^1 \times [0, \pi]$ définie par une courbe convexe C n'a pas de graphe autre que $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ and $\mathbf{T}^1 \times \{\pi\}$ si la courbure s'annule Γ , que dit le théorème dans ce cas ?

3. Les méthodes variationnelles de Mather lui ont permis de prouver un résultat de diffusion bien plus fort : il existe un point z dont l'ensemble ω -limite contient un ensemble bien ordonné de nombre de rotation ρ , pour tout réel ρ dans l'intervalle délimité par les bords de U .

Nous allons donner ici une preuve simple du théorème de Mather, par des arguments proches de ceux de Birkhoff, à l'aide notamment de la notion de sur-orbite introduite dans le sujet par S. Angenent. La preuve se rapproche également de raisonnements dus à Katznelson et Ornstein.

Pour tout point $z = (x, y)$ dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ ou dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, on définira les arcs (orientés suivant les y croissants) :

$$\begin{aligned} V_-(z) &= \{x\} \times]-\infty, y], \\ \check{V}_-(z) &= \{x\} \times]-\infty, y), \\ V_+(z) &= \{x\} \times [y, +\infty[, \\ \check{V}_+(z) &= \{x\} \times (y, +\infty[, \\ V(z) &= \{x\} \times \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Une suite $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ est une *sur-orbite* si $F(z_i) \in V_+(z_{i+1})$, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. On dira que la suite *joint* z_0 à z_n et que n est sa *longueur*. Remarquons que si $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(z_i)_{n \leq i \leq m}$ sont des sur-orbites, alors $(z_i)_{0 \leq i \leq m}$ est une sur-orbite.

Le théorème 4.1.3 se déduira des deux propositions suivantes :

PROPOSITION 4.1.4 : *Pour toute sur-orbite $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$, il existe une orbite $(z'_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $z'_0 \in V_-(z_0)$ et $z'_n \in V_+(z_n)$.*

PROPOSITION 4.1.5 : *Pour tout compact K de U , il existe un entier $n_K \geq 1$ tel que tout point $z_1 \in K$ peut-être joint à tout point $z_2 \in K$ par une sur-orbite de longueur $\leq n_K$.*

4.2 Preuve des résultats

Expliquons d'abord pourquoi le théorème 4.1.3 est une conséquence des propositions 4.1.4 et 4.1.5 :

Démonstration du théorème 4.1.3. Considérons une suite croissante $(A^k)_{k \geq 0}$ d'anneaux compacts dans U , chacun bordé par deux graphes continus, et tels que $\bigcup_{k \geq 0} A^k = U$. On écrit

$$A^k = \{(x, y) \in \mathbf{A} \mid \psi_-^k(x) \leq y \leq \psi_+^k(x)\},$$

puis on définit

$$\begin{aligned} A_-^k &= \{(x, y) \in U \mid y \leq \psi_-^k(x)\}, \\ A_+^k &= \{(x, y) \in U \mid y \geq \psi_+^k(x)\}. \end{aligned}$$

On peut toujours supposer que $F(A_-^0) \cap A_+^0 = \emptyset$.

Grâce à la proposition 4.1.5, on sait qu'il existe $n^k \geq 1$ tel que tout point $z \in A^k$ peut être joint à tout point $z' \in A^k$ par une sur-orbite de longueur $\leq n^k$. Si on choisit $z \in \text{gr}(\psi_-^k)$, et $z' \in \text{gr}(\psi_+^k)$ et que l'on applique la proposition 4.1.4, on trouve une orbite qui joint un point de A_-^k à un point de A_+^k . Il existe donc $m^k \leq n^k$ tel que :

$$\begin{cases} F^{m^k}(A_-^k) \cap A_+^k \neq \emptyset, \\ F^i(A_-^k) \cap A_+^k = \emptyset, \end{cases} \quad \text{si } 0 \leq i < m^k.$$

Comme conséquence la proposition 4.1.4 on sait aussi qu'il n'existe aucune sur-orbite de longueur $< m^k$ qui joint un point de A_-^k à un point de A_+^k .

Le fait que $F(A_-^0) \cap A_+^0 = \emptyset$ implique que $m^k \geq 2$. Ainsi, il existe une orbite $(z_i^k)_{-m_-^k \leq i \leq m_+^k}$ telle que

- $m_-^k + m_+^k = m^k$;
- $z_0^k \in A^0$;
- $z_{-m_-^k}^k \in A_-^k$;
- $z_{m_+^k}^k \in A_+^k$;
- $z_i^k \in \text{Int}(A^k)$ si $-m_-^k < i < m_+^k$.

Fixons $k < k'$ et considérons le premier point $z_{i_0}^{k'}$ et le dernier point $z_{i_1}^{k'}$ de la suite $(z_i^{k'})_{-m_-^{k'} \leq i \leq m_+^{k'}}$ qui sont dans A_k . On sait qu'il existe une sur-orbite de longueur $\leq n^k$ qui joint $z_{i_0}^{k'}$ à $z_{i_1}^{k'}$. Puisqu'il n'existe aucune sur-orbite de longueur $< m^{k'}$ qui joint $z_{-m_-^{k'}}^{k'}$ à $z_{m_+^{k'}}^{k'}$, on en déduit que $i_1 - i_0 \leq n^k$. Comme conséquence on a :

$$\begin{aligned} -m_-^{k'} \leq i < -n^k &\Rightarrow z_i^{k'} \in \text{Int}(A_-^k), \\ n^k < i \leq m_+^{k'} &\Rightarrow z_i^{k'} \in \text{Int}(A_+^k). \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} m_-^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} m_+^k = +\infty.$$

On peut donc trouver une sous-suite $(A^{\theta(k)})_{k \geq 0}$ de $(A^k)_{k \geq 0}$ telle que la suite $(z_0^{\theta(k)})_{k \geq 0}$ converge vers un point $z_0 \in A^0$. Toute suite $(z_i^{\theta(k)})_k$, $i \in \mathbf{Z}$, converge vers un point z_i . Remarquons que $z_i \in A_-^{\theta(k)}$ si $i < -n^{\theta(k)}$ et que $z_i \in A_+^{\theta(k)}$ si $i > n^{\theta(k)}$. Ceci signifie que l'orbite $(z_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ joint les deux bouts de U . \square

Prouvons maintenant les propositions 4.1.4 et 4.1.5

Démonstration de la proposition 4.1.4. Puisque F dévie la verticale à droite, on peut noter que pour tout point $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \geq 1$, on a

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} p_1 \circ f^n(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} p_2 \circ f^n(x, y) = -\infty$$

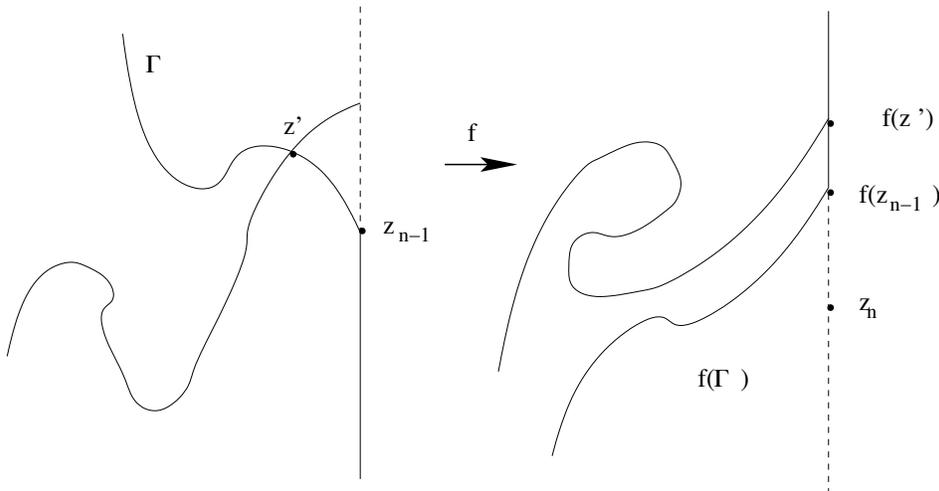
et

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} p_1 \circ f^n(x, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} p_2 \circ f^n(x, y) = +\infty.$$

On peut définir de façon similaire une sur-orbite $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$ de f . La proposition 4.1.4 se déduit immédiatement du lemme suivant :

LEMME 4.2.1 : Si $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une sur-orbite de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, le premier point où l'arc orienté $f^n(V(z_0))$ rencontre $V(z_n)$ appartient à la fois à $f^n(V_-(z_0))$ et à $V_+(z_n)$.

Démonstration. On va faire une récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est évident puisque le seul point où $f(V(z_0))$ rencontre $V(z_1)$ est $f(z_0)$ et puisque $f(z_0)$ appartient à $V_+(z_1)$. Maintenant, fixons $n \geq 2$ et supposons que le théorème ait été prouvé jusqu'à l'ordre $n - 1$. Considérons une sur-orbite $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$. On obtient un plongement topologique propre de \mathbf{R} par assemblage de $V_-(z_{n-1})$ et de $f^{-1}(V_+(f(z_{n-1})))$. Cet arc Γ est situé à gauche de $V(z_{n-1})$. Plus précisément, $V_+(z_{n-1})$ est disjoint de la composante connexe $L(\Gamma)$ de $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ qui est à gauche de Γ . Grâce à l'hypothèse de récurrence, on sait que le premier point où l'arc $f^{n-1}(V(z_0))$ rencontre $V(z_{n-1})$ appartient à la fois à $f^{n-1}(V_-(z_0))$ et à $V_+(z_{n-1})$. On en déduit que le premier point z où cet arc quitte $L(\Gamma)$ appartient à la fois à $f^{n-1}(V_-(z_0))$ et à $f^{-1}(V_+(f(z_{n-1})))$ (il peut éventuellement être égal à z_{n-1}). Remarquons maintenant que $f(\Gamma)$, qui est obtenu par assemblage de $f(V_-(z_{n-1}))$ et de $V_+(f(z_{n-1}))$, est à gauche de $V(z_n)$. Plus précisément, $V_-(f(z_{n-1}))$ est disjoint de l'adhérence de $f(L(\Gamma))$. On en déduit que $f(z)$ est le premier point où $f^n(V(z_0))$ rencontre $V(z_n)$. Il appartient à la fois à $f^n(V_-(z_0))$ et à $V_+(f(z_{n-1}))$. Puisque $V_+(f(z_{n-1})) \subset V_+(z_n)$, le lemme est démontré à l'ordre n . \square



Le lemme précédent est implicite dans les travaux d'Angenent et était déjà connu par Birkhoff dans le cas où $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une orbite.

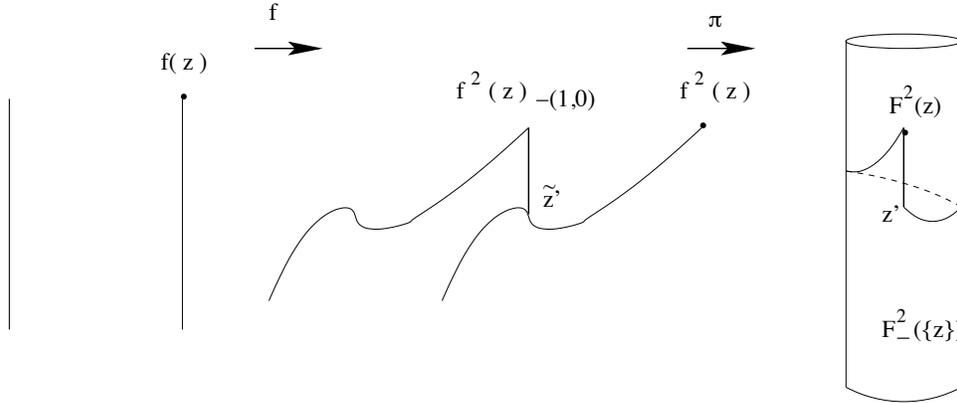
Démonstration de la proposition 4.1.5. Notons \mathcal{P} l'ensemble des parties de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ et définissons l'application :

$$F_- : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$Z \mapsto \bigcup_{z \in Z} V_-(F(z)).$$

Remarquons que $z' \in F_-^n(\{z\})$ si et seulement s'il existe une sur-orbite $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $z_0 = z$ et $z_n = z'$. Notons aussi que la frontière des $F_-^2(\{z\})$ est une courbe fermée simple obtenue par

assemblage d'un segment vertical joignant un point $z' \in \check{V}_-(F^2(z))$ à $F^2(z)$ et d'un arc joignant $F^2(z)$ à z' qui se projette par p_1 sur \mathbf{T}^1 parcouru suivant les x décroissants. L'ensemble $F_-^2(\{z\})$ est l'adhérence de la composante connexe inférieure de $(\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}) \setminus \partial(F_-^2(\{z\}))$.



Indiquons quelques propriétés :

(i) pour tout $M \in \mathbf{R}$ il existe $M' \in \mathbf{R}$ tel que

$$p_2(z) \geq M' \Rightarrow \mathbf{T}^1 \times]-\infty, M] \subset F_-^2(\{z\}) ;$$

(ii) l'application $z \mapsto \partial(F_-^2(\{z\}))$ est continue, où l'on munit l'ensemble des parties compactes de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ de la topologie de Hausdorff.

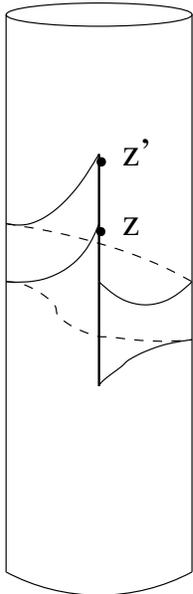
Définissons maintenant

$$G(z) = F_-(V_-(F^{-1}(z))) = F_-^2(\{F^{-2}(z)\})$$

et remarquons que

(iii) on a $G(z) \subset G(z')$, pour tout $z' \in V^+(z)$;

(iv) l'application $z \mapsto \partial(G(z))$ est continue.



LEMMA 4.2.2 : Pour toute partie ouverte non vide $O \subset U$, l'ensemble $\bigcup_{n \geq 0} F_-^n(O)$ contient U .

Avant de prouver le lemme, expliquons pourquoi il implique la proposition. Soit K une partie compacte de U . Pour tout $z \in K$, choisissons une partie ouverte O_z dont l'adhérence est compacte et incluse dans l'intérieur de $F_-^2(\{z\})$. Grâce à la propriété **ii**) énoncée plus haut, on sait que l'on peut trouver un voisinage O'_z de z tel que $\overline{O_z} \subset \text{Int}(F_-^2(\{z'\}))$, pour tout $z' \in O'_z$. Par compacité de K , on peut trouver une partie finie $(z^l)_{1 \leq l \leq L}$ dans K telle que $K \subset \bigcup_{1 \leq l \leq L} O'_{z^l}$. De plus, chaque ensemble $F_-^n(O_{z^l})$ étant ouvert, on sait grâce au lemme 2 que pour tout $l \leq L$, il existe $n^l \geq 0$ tel que $K \subset \bigcup_{0 \leq n \leq n^l} F_-^n(O_{z^l})$. Ainsi, on a

$$K \subset \bigcup_{0 \leq n \leq n^l} (F_-^n \circ F_-^2)(\{z^l\}) \subset \bigcup_{0 \leq n \leq n^l+2} F_-^n(\{z^l\}),$$

pour tout $z^l \in O'_z$. On obtient la proposition 4.1.5 en posant $n_K = \max_{1 \leq l \leq L} n^l + 2$. \square

Démonstration du lemme 4.2.2 : On va prouver que pour toute partie ouverte non vide $O \subset U$, l'ensemble $W = \bigcup_{n \geq 2} F_-^n(O)$ contient U . Cet ensemble est positivement invariant par $F \in \mathcal{F}$. De plus, $F_-^2(\{z\}) \subset W$ pour tout $z \in W$ et tout $F \in \mathcal{F}$. On peut bine sûr supposer que $W \neq \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$. À l'aide la la propriété **i**) énoncée plus haut, on sait que W vérifie la propriété suivante :

(B) : il existe M et M' tels que $\mathbf{T}^1 \times]-\infty, M] \subset W \subset \mathbf{T}^1 \times]-\infty, M']$.

SOUS-LEMME 4.2.3: *One has $W = \text{Int}(\overline{W})$.*

Démonstration: L'inclusion $W \subset \text{Int}(\overline{W})$ étant évidente, on doit prouver l'inclusion inverse. Chaque ensemble $F_-^n(O)$, $n \geq 1$, est *radial* :

$$z \in F_-^n(O) \Rightarrow V_-(z) \subset F_-^n(O).$$

Ceci implique que W vérifie la propriété plus forte suivante : on a $G(z) \subset W$, pour tout $z \in W$. En effet, il existe $z'' \in V^+(z)$ tel que $F^{-1}(z'') \in \bigcup_{n \geq 1} F_-^n(O)$. Ceci implique que W contient $G(z'') = F_-(V_-(F^{-1}(z'')))$. Mais on a vu dans **iii**) que $G(z) \subset G(z'')$.

Supposons maintenant que $z = (x, y)$ appartient à $\text{Int}(\overline{W})$. Fixons $z^0 = (x, y^0) \in \text{Int}(\overline{W})$, où $y_0 > y$. La propriété **iv**) implique que z appartient à $G(z^1)$ si $z^1 = (x^1, y^1)$ est assez proche de z^0 , mais strictement à droite de $V(z)$. Puisque z_1 peut être choisi dans W (puisque $z^0 \in \text{Int}(\overline{W})$) on en déduit que $z \in W$. \square

Fin de la démonstration du lemme 4.2.2 : Puisque F est exact-symplectique, puisque W est positivement invariant par F et puisque (B) est satisfaite, on en déduit que $F(\overline{W}) = \overline{W}$. En prenant les intérieurs on obtient $F(W) = W$. Pour tout point $z \in W$, on a

$$\bigcup_{z' \in F(V_-(F^{-1}(z))) \cup F^{-1}(V_-(F(z)))} V_-(z') \subset W.$$

On en déduit que pour tout point $z \in \overline{W}$, on a

$$\bigcup_{z' \in F(V_-(F^{-1}(z))) \cup F^{-1}(V_-(F(z)))} \check{V}_-(z') \subset W.$$

Ceci implique que la projection p_1 est injective sur ∂W . Puisque (B) est vérifiée, la frontière de W se projette par p_1 sur \mathbf{T}^1 . Puisque cette frontière est compacte, c'est le graphe d'une fonction $\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$ et on a $W = \{(x, y) \in \mathbf{A} \mid y < \psi(x)\}$. Ainsi, on a $\partial W \cap U = \emptyset$. Puisque $W \cap U \neq \emptyset$ (l'ensemble contient $F^2(O)$), on en déduit la proposition. \square

§5. Exercices

Exercice A

On suppose que le couple (F, f) vérifie les hypothèses du théorème de Poincaré-Birkhoff, où F est un difféomorphisme de $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$ et $f : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \times [0, 1]$ un relèvement. On suppose de plus que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R} \times [0, 1]$ le réel -1 n'est pas valeur propre de $Df(x, y)$.

1) On écrit $f(x, y) = (X, Y)$. Montrer qu'il existe une fonction $h : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que

$$dh = (X - x)(dY + dy) - (Y - y)(dX + dx).$$

2) Expliquer pourquoi h relève une fonction $H : \mathbf{T}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, pourquoi H est constante sur chaque bord et pourquoi le minimum est atteint dans $\mathbf{T}^1 \times]0, 1[$.

3) Expliquer pourquoi f a au moins deux points fixes qui se projettent sur des points distincts de $\mathbf{T}^1 \times [0, 1]$.

Exercice B

Mêmes questions, où on suppose cette fois-ci que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R} \times [0, 1]$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) > 0$.

Exercice 2

Soit F un difféomorphisme de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ déviant la verticale à droite et $M > 0$. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que tout ensemble bien ordonné X de nombre de rotation $\rho(X) \in [-M, M]$ est le graphe d'une fonction lipschitzienne de rapport K définie sur $p_1(X)$.

Exercice 2

Soit F un difféomorphisme de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ déviant la verticale à droite et exact symplectique.

1) Montrer que l'ensemble $E(x)$ apparaissant dans la preuve de la proposition 3.3.2 ne contient pas de vecteurs verticaux.

2) Montrer que si F vérifie également les propriétés génériques **i)** et **ii)** énoncées dans la section 3.3, alors $E(x)$ est réduit à un vecteur.

Exercice 3

On note $F_\mu : \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ l'application standard relevée par

$$\begin{aligned} f_\mu : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^2, \\ (x, y) &\mapsto (x + y, y + \mu \sin(2\pi(x + y))). \end{aligned}$$

On suppose que F a une courbe invariante, graphe de la fonction $\Psi : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{R}$. On note $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ le relèvement de Ψ et on pose

$$\begin{aligned} \theta : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}, \\ x &\mapsto p_1 \circ f_\mu(x, \psi(x)). \end{aligned}$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a

$$\theta^2(x) - 2\theta(x) + x - \mu \sin 2\pi\theta(x) = 0.$$

2) En considérant l'application

$$x \mapsto x + \frac{\mu}{2} \sin 2\pi x,$$

en déduire que $|\mu| \leq \frac{1}{\pi}$.

Exercice 4

1) On se donne un difféomorphisme F de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ déviant la verticale à droite et un relèvement $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. On considère une fonction génératrice $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. On suppose que F a une courbe invariante, graphe de la fonction $\Psi : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{R}$. On note $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ le relèvement de Ψ et on pose

$$\begin{aligned} \theta : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}, \\ x &\mapsto p_1 \circ f_\mu(x, \psi(x)). \end{aligned}$$

On définit également

$$h^* : (x, x') \mapsto h(x, x') - \int_x^{x'} \psi(t) dt.$$

1.a) Supposons d'abord que ψ est de classe C^1 . Expliquer pourquoi h^* est la fonction génératrice d'un difféomorphisme $f^* : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ qui relève un difféomorphisme exact-symplectique qui dévie la verticale à droite $F^* : \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$. Comment déduit-on F^* à partir de F ? admet-il un graphe invariant ?

1.b) Montrer que la fonction $x \mapsto h^*(x, \theta(x))$ est constante (commencer par le cas où ψ est de classe C^1)

1.c) Montrer qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que

$$\begin{cases} h^*(x, x') = C & \text{si } x' = \theta(x), \\ h^*(x, x') > C & \text{si } x' \neq \theta(x). \end{cases}$$

1.d) On suppose que $(x_i, y_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ est une orbite de f se trouvant sur le graphe de ψ et on fixe deux entiers m et n tels que $m < n$. Montrer que pour toute suite $(x'_i)_{m \leq i \leq n}$ telle que $x'_m = x_m$ et $x'_n = x_n$ on a

$$\sum_{m \leq i < n} h(x'_i, x'_{i+1}) \geq \sum_{m \leq i < n} h(x_i, x_{i+1}).$$

dans quel cas a-t-on égalité ?

2) Soit C une courbe convexe de classe C^2 et dont la courbure s'annule en un point. Montrer que le difféomorphisme $F : \mathbf{T}^1 \times [0, \pi] \rightarrow \mathbf{T}^1 \times [0, \pi]$ définissant le billard n'a pas de courbe invariante autres que les deux cercles frontières.

Bibliography

- [A] S. B. ANGENENT : Monotone recurrence relations, their Birkhoff orbits and topological entropy, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **10** (1990), 15-41.
- [AL] S. AUBRY, P. LE DAERON. The discrete Frenkel-Kontorova model and its generalizations, *Physica D*, **8** (1983), 381-422.

- [B1] G. D. BIRKHOFF. Proof of Poincaré's last geometric theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14** (1913), 14-22.
- [B2] G. D. BIRKHOFF. Surface transformation and their dynamical applications, *Acta Math.*, **43** (1920), 1-119.
- [B3] G. D. BIRKHOFF. An extension of Poincaré's last geometric theorem, *Acta Math.*, **47** (1925), 297-311.
- [B4] G. D. BIRKHOFF. On the periodic motions of dynamical systems, *Acta Math.*, **50** (1927), 359-379.
- [B5] G. D. BIRKHOFF : Sur quelques courbes fermées remarquables, *Bull. Soc. Math. France*, **80** (1932), 1-26.
- [B6] G. D. BIRKHOFF : Sur l'existence de régions d'instabilité en dynamique, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **8** (1932), 369-386.
- [C] A. CHENCINER. La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif: de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather *Astérisque, Soc. Math. de France*, **123** (1985), 147-170.
- [F1] A. FATHI : Une interprétation plus topologique des la démonstration du théorème de Birkhoff, *Appendice du Chap. I de [He]*.
- [F2] A. FATHI. Weak KAM Theorem and Lagrangian Dynamics, *in preparation*.
- [He] M. R. HERMAN : Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, *Astérisque, Soc. Math. France*, **103-104** (1983).
- [Kato] A. KATOK. Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorems, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **50** (1982), 185-194.
- [KatoHa] A. KATOK, B. HASSELBLATT. Introduction to the modern theory of dynamical systems, *Cambridge University Press* (1995).
- [KatzO] Y. KATZNELSON, D. S. ORNSTEIN : Twist maps and Aubry-Mather sets. Lipa's legacy (New York, 1995), *Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI*, **211** (1995), 343-357.
- [L] P. LE CALVEZ : Drift orbits for families of twist maps of the annulus, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **27** (2007), 869-879.
- [Man] R. MAÑÉ. On the minimizing measures of Lagrangian Dynamical Systems, *Nonlinearity*, **5** (1992), 623-638.
- [Mat1] J. MATHER. Existence of quasi periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus *Topology*, **21** (1982), 457-467.
- [Mat2] J. MATHER : Glancing billards, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **2** (1982), 397-403.
- [Mat3] J. MATHER : Variational construction of orbits of twist diffeomorphisms, *J. Amer. Math. Soc.*, **4** (1991), 207-263.

- [Mat4] J. MATHER. Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems, *Math. Z.*, **207** (1991), 169-207.
- [MatF] J. MATHER, G. FORNI. Action minimizing orbits in Hamiltonian systems. In Graffi (ed) Transition to chaos in Classical and Quantum Mechanics *Springer Lecture Notes*, **1589** (1992)
- [Mo] J. MOSER. Monotone twist mappings and the calculus of variations, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **6** (1986), 401-413.
- [P] H. POINCARÉ. Sur un théorème de géométrie, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **33** (1912), 375-407.
- [T] S. TABACHNIKOV. Billiards, *Panoramas et Synthèses*, *Soc. Math. de France*, (1995).